

ב"א אנליזה 1 תשעח מועד א

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \ln(1 + e^x \sin(x))}{1 - \cos(x)} \quad (\text{א})$$

פתרון: נציג את הגבול כמכפלה של גבולות ידועים

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \ln(1 + e^x \sin(x))}{1 - \cos(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{\ln(1 + e^x \sin(x))}{e^x \sin(x)} \cdot \frac{e^x \sin(x)}{x} \cdot \frac{x^2}{1 - \cos(x)} \cdot \frac{x \cdot x}{x^2} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot e^0 \cdot 1 \cdot 2 = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x)^{\frac{1}{\sin(x)}} \quad (\text{ב})$$

פתרון: כיוון ש $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 0$, נשתמש בכלל e לחשב

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x)^{\frac{1}{\sin(x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) \frac{1}{\sin(x)}}$$

נחשב:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)}{\sin(x)} \stackrel{\frac{0}{0}, L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos(x)} = \frac{1}{1} = 1$$

ולכן הגבול המבוקש הוא $e^1 = e$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot n!}{(2n)!} \quad (\text{ג})$$

פתרון: לכל $n \geq 3$ מתקיים

$$0 \leq \frac{2^n \cdot n!}{(2n)!} = \frac{2^n}{(n+1) \cdots (2n)} \leq \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot n!}{(2n)!} = 0$$

2. נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - a}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

(א) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x = 0$?

פתרון: על מנת שהפונקציה תהיה רציפה ב $x = 0$ צריך להתקיים

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

כלומר

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - a}{x} = a$$

מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - a}{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\substack{0 \\ 0}, L'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1 = a & \text{if } a = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - a}{x} = \left\{ \frac{1-a}{0} \right\} = \pm \infty & \text{if } a \neq 1 \end{cases}$$

ולכן רק עבור $a = 1$ מתקיים השוויון הדרוש.

(ב) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x = 0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלו?

פתרון: פונקציה שגזירה בנקודה, רציפה בה. לכן נבדוק רק עבור $a = 1$ (שזה המקרה היחיד בו רציפה ב $x = 0$) אם גזירה ב $x = 0$. לפי הגדרה, צריך לחשב את הגבול

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

נחשב:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \stackrel{\substack{0 \\ 0}, L'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{\substack{0 \\ 0}, L'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

כלומר $f'(0) = \frac{1}{2}$ קיימת וסופית ומתקיים $f'(0) = \frac{1}{2}$.

3. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1} = 2a_n + \frac{1}{n}$ וכן נתון $a_1 > 0$.

(א) הוכיחו כי הסדרה עולה.

פתרון: טענה: הסדרה חיובית. נוכיח באינדוקציה כי $a_n > 0$:

- בסיס $n = 1$: נתון ש $a_1 > 0$.
- צעד - נניח נכונות עבור n , כלומר $a_n > 0$. נוכיח נכונות עבור $n + 1$, כלומר $a_{n+1} > 0$. לפי הגדרה:

$$a_{n+1} = 2a_n + \frac{1}{n} > 0$$

כעת, לכל n טבעי, לפי הגדרה $a_{n+1} = 2a_n + \frac{1}{n}$ ולכן

$$a_{n+1} - a_n = a_n + \frac{1}{n} > 0$$

ולכן $a_{n+1} \geq a_n$ כנדרש.

(ב) חשבו את גבול הסדרה $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

פתרון: הוכחנו שהסדרה עולה. אם הסדרה חסומה מלמעלה אז היא מתכנסת לגבול סופי שנשמנו L , כלומר $a_n \rightarrow L$ ולכן גם $a_{n+1} \rightarrow L$. מהגדרת הסדרה נקבל

$$L \leftarrow a_{n+1} = 2a_n + \frac{1}{n} \rightarrow 2L + 0 = 2L$$

ולכן $L = 2L$. ולכן $L = 0$ אבל הסדרה עולה ולכן $a_n \geq a_1 > 0$ ולכן $L \geq a_1 > 0$. סתירה. לכן הסדרה אינה חסומה מלמעלה והגבול שלה הוא ∞ .

(א) מצאו את הערך המינימלי של הפונקציה $f(x) = e^{2x} - x$.
פתרון: נגזור

$$f'(x) = 2e^{2x} - 1$$

ולכן f' מתאפסת מא"מ $2e^{2x} = 1$ אמ"מ $e^{2x} = \frac{1}{2}$ אמ"מ $2x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$ ולכן מתאפס רק ב $x = -\frac{\ln(2)}{2}$ ומוגדרת בכל \mathbb{R} . בנוסף, לפי הטבלה

x	$-\ln(2) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{\ln(2)}{2}$	0
$f'(x)$	$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 < 0$	0	+

נסיק שהפונקציה f יורדת ממש בקרן $\left(-\infty, -\frac{\ln(2)}{2}\right)$ ועולה ממש בקרן $\left(-\frac{\ln(2)}{2}, \infty\right)$ ולכן $-\frac{\ln(2)}{2}$ הוא נקודת מינימום מוחלט של f והערך בו הוא

$$f\left(-\frac{\ln(2)}{2}\right) = f(\ln(2^{-0.5})) = f\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = 2\left(e^{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\right)^2 - 1 = 2\frac{1}{2} - 1 = 0$$

(ב) כמה פתרונות יש למשוואה $e^x = \sqrt{x}$?
פתרון: אם a פתרון ל $e^x = \sqrt{x}$ אזי $e^a = \sqrt{a}$ ואז $(e^a)^2 = a$ כלומר $e^{2a} - a = 0$ ופתרון למשוואה $e^{2x} - x$ מסעיף קודם (נשים לב שבגלל השורש במשוואה שלנו, $a \geq 0$). נתחיל לבדוק כמה שורשים יש ל

$$f(x) = e^{2x} - x$$

מסעיף קודם. בסעיף קודם ראינו שהערך המינימלי של f הוא 0 ומתקבל ב $-\frac{\ln(2)}{2}$. לכן לכל x מתקיים

$$f(x) > f\left(-\frac{\ln(2)}{2}\right) = 0$$

ולכן רק $-\frac{\ln(2)}{2}$ שורש של f . כעת, אם a פתרון למשוואה של השאלה הוא גם שורש של f ולכן $a = -\frac{\ln(2)}{2}$ אבל $-\frac{\ln(2)}{2} < 0$ ולכן $a < 0$ בסתירה לכך שהוא פותר משוואה עם שורש. מסקנה: אין פתרון למשוואה שבשאלה.

5. תהא פונקציה f שגזירה בכל הממשיים, ומקיימת כי $f'(x) \leq x$ לכל $x \in \mathbb{R}$. כמו כן נתון ש $f(0) = 0$.

(א) הוכיחו שלכל $x > 0$ מתקיים $f(x) < x^2$.

פתרון: לפי משפט לגרנז', לכל $x > 0$, בקטע $[0, x]$ הפונקציה f רציפה (כי גזירה) ולכן קיימת $0 < c < x$ כך ש

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(c)$$

מהנתון $f'(x) \leq x$ לכל x (בפרט $f'(c) \leq c$) + הנתון $f(0) = 0$ נסיק ש

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(c) \leq c < x$$

ואם נכפיל ב x שחיובי, אי השיוויון ישמר ונקבל $f(x) < x^2$ כנדרש.

(ב) הוכיחו כי $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ (רמז: בחרו $h(x)$ עבורה $h'(x) = f'(x) - x$).
פתרון: לפי משפט לגרנז', לכל $x < -1$, בקטע $[x, -1]$ הפונקציה f רציפה (כי גזירה) ולכן קיימת c כך ש

$$\frac{f(-1) - f(x)}{-1 - x} = f'(c)$$

מהנתון $f'(x) \leq x$ לכל x (בפרט $f'(c) \leq c$) נסיק ש

$$\frac{f(-1) - f(x)}{-1 - x} = f'(c) \leq c \leq -1$$

ואם נכפיל ב $-1 - x$ שחיובי, אי השיוויון ישמר ונקבל $f(-1) - f(x) \leq -(-1 - x) = 1 + x$ נעביר אגפים לקבל

$$\infty \xleftarrow{x \rightarrow -\infty} f(-1) - 1 - x \leq f(x)$$

ולכן לפי חצי סנוויץ גם $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ כנדרש.