ב"א אנליזה 1 תשעח מועד א

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\ln(1+e^x\sin(x))}{1-\cos(x)}$

פתרון: נציג את הגבול כמכפלה של גבלות ידועים

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\ln(1+e^x\sin(x))}{1-\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{\ln(1+e^x\sin(x))}{e^x\sin(x)}\cdot\frac{e^x\sin(x)}{x}\cdot\frac{x^2}{1-\cos(x)}\cdot\frac{x\cdot x}{x^2}$$
$$=1\cdot 1\cdot e^0\cdot 1\cdot 2=2$$

(ב) $\lim_{x\to 0}(e^x)^{\frac{1}{\sin(x)}}$

פתרון: כיוון ש $\lim_{x\to 0}e^x=1$, נשתמש בכלל e לחשב

$$\lim_{x\to 0}(e^x)^{\frac{1}{\sin(x)}}=e^{\lim_{x\to 0}(e^x-1)\frac{1}{\sin(x)}}$$

נחשב:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)}{\sin(x)}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos(x)}=\frac{1}{1}=1$$

ולכן הגבול המבוקש הוא $e^1=e$.

(ג) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot n!}{(2n)!}$

פתרון: לכל $n\geq 3$ מתקיים

$$0\leq\frac{2^n\cdot n!}{(2n)!}=\frac{2^n}{(n+1)\cdots(2n)}\leq\frac{2^n}{3^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0$$

ולכן, לפי סנוויץ $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot n!}{(2n)!}=0$.

2. נביט בפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-a}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$$

(א) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x=0$?

פתרון: על מנת שהפונקציה תהיה רציפה ב $x=0$ צריך להתקיים

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$

כלומר

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-a}{x}=a$$

מתקיים

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-a}{x}=\begin{cases}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1=a & \text{if} a=1\\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-a}{x}=\{\frac{1-a}{0}\}=\pm\infty & \text{if} a\neq 1\end{cases}$$

ולכן רק עבור $a=1$ מתקיים השיוויון הדרוש.

(ב) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x=0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלו?

פתרון: פונקציה שגזירה בנקודה, רציפה בה. לכן נבדוק רק עבור $a=1$ (שזה המקרה היחיד בו f רציפה ב $x=0$) אם f גזירה ב $x=0$. לפי הגדרה, צריך לחשב את הגבול

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

נחשב:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$$

כלומר $f'(0)$ קיימת וסופית ומתקיים $f'(0)=\frac{1}{2}$.

3. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1}=2a_n+\frac{1}{n}$ וכן נתון $a_1>0$.

(א) הוכיחו כי הסדרה עולה.

פתרון: טענה: הסדרה חיובית. נוכיח באינדוקציה כי $a_n>0$:

- בסיס $n=1$: נתון ש $a_1>0$.
- צעד - נניח נכונות עבור n, כלומר $a_n>0$. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר $a_{n+1}>0$. לפי הגדרה:

$$a_{n+1}=2a_n+\frac{1}{n}>0$$

כעת, לכל n טבעי, לפי הגדרה $a_{n+1}=2a_n+\frac{1}{n}$ ולכן

$$a_{n+1}-a_n=a_n+\frac{1}{n}>0$$

ולכן $a_{n+1}\geq a_n$ כנדרש.

(ב) חשבו את גבול הסדרה $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

פתרון: הוכחנו שהסדרה עולה. **אם** הסדרה חסומה מלמעלה אז היא מתכנסת לגבול סופי שנסמנו L, כלומר $a_n\to L$ ולכן גם $a_{n+1}\to L$. מהגדרת הסדרה נקבל

$$L\leftarrow a_{n+1}=2a_n+\frac{1}{n}\to 2L+0=2L$$

ולכן $L=2L$. ולכן $L=0$ אבל הסדרה עולה ולכן $a_n\geq a_1>0$ ולכן $L\geq a_1>0$. סתירה. לכן הסדרה אינה חסומה מלמעלה והגבול שלה הוא ∞.

.4

(א) מצאו את הערך המינמאלי של הפונקציה $f(x)=e^{2x}-x$.
פתרון: נגזור

$$f'(x) \quad = \quad 2e^{2x}-1$$

ולכן f' מתאפסת מא"מ $2e^{2x}=1$ אמ"מ $e^{2x}=\frac{1}{2}$ אמ"מ $2x=\ln(\frac{1}{2})=-\ln(2)$ ולכן מתאפס רק ב $x=-\frac{\ln(2)}{2}$ ומוגדרת בכל $\mathbb{R}$. בנוסף, לפי הטבלה

x	$-\ln(2)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{\ln(2)}{2}$	0
$f'(x)$	$2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-1<0$	0	$+$

נסיק שהפונקציה f יורדת ממש בקרן $\left(-\infty,-\frac{\ln(2)}{2}\right)$ ועולה ממש בקרן $\left(-\frac{\ln(2)}{2},\infty\right)$ ולכן $-\frac{\ln(2)}{2}$ הוא נקודת מינימום מוחלט של f והערך בו הוא

$$f(-\frac{\ln(2)}{2})=f(\ln(2^{-0.5}))=f(\ln(\frac{1}{\sqrt{2}}))=2\left(e^{\ln(\frac{1}{\sqrt{2}})}\right)^2-1=2\frac{1}{2}-1=0$$

.

(ב) כמה פתרונות יש למשוואה $e^x=\sqrt{x}$?
פתרון: אם a פתרון ל $e^x=\sqrt{x}$ אזי $e^a=\sqrt{a}$ ואז $(e^a)^2=a$ כלומר $e^{2a}-a=0$ ו a פתרון למשוואה $e^{2x}-x$ מסעיף קודם (נשים לב שבגלל השורש במשוואה שלנו, $a\geq 0$). נתחיל לבדוק כמה שורשים יש ל

$$f(x)=e^{2x}-x$$

מסעיף קודם. בסעיף קודם ראינו שהערך המינמאלי של f הוא 0 ומתקבל ב $-\frac{\ln(2)}{2}$. לכן לכל x מתקיים

$$f(x)>f\left(-\frac{\ln(2)}{2}\right)=0$$

ולכן רק $-\frac{\ln(2)}{2}$ שורש של f. כעת, אם a פתרון למשוואה של השאלה הוא גם שורש של f ולכן $a=-\frac{\ln(2)}{2}$ אבל $-\frac{\ln(2)}{2}<0$ ולכן $a<0$ בסתירה לכך שהוא פותר משוואה עם שורש. מסקנה: אין פתרון למשוואה שבשאלה.

5. תהא פונקציה f שגזירה בכל הממשיים, ומקיימת כי $f'(x)\leq x$ לכל $x\in\mathbb{R}$. כמו כן נתון ש $f(0)=0$.

(א) הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים $f(x)<x^2$.
פתרון: לפי משפט לגרנז', לכל $x>0$, בקטע $[0,x]$ הפונקציה f רציפה (כי גזירה) ולכן קיימת $0<c<x$ כך ש

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(c)$$

מהנתון $f'(x)\leq x$ לכל x (בפרט $f'(c)\leq c$) + הנתון $f(0)=0$ נסיק ש

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(c)\leq c<x$$

ואם נכפיל ב x שחיובי, אי השיוון ישמר ונקבל $f(x)<x^2$ כנדרש.

(ב) הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ (רמז: בחרו $h(x)$ עבורה $h'(x) = f'(x) - x$).

פתרון: לפי משפט לגרנז', לכל $x < -1$, בקטע $[x, -1]$ הפונקציה f רציפה (כי גזירה) ולכן קיימת $x < c < -1$ כך ש

$$\frac{f(-1) - f(x)}{-1 - x} = f'(c)$$

מהנתון $x \leq f'(x)$ לכל x (בפרט $c \leq f'(c)$) נסיק ש

$$\frac{f(-1) - f(x)}{-1 - x} = f'(c) \leq c \leq -1$$

ואם נכפיל ב $-1 - x$ שחיובי, אי השיוון ישמר ונקבל $f(-1) - f(x) \leq -(-1 - x) = 1 + x$ נעביר אגפים לקבל

$$\infty \xleftarrow{x\to-\infty} f(-1) - 1 - x \leq f(x)$$

ולכן לפי חצי סנוויץ גם $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ כנדרש.