

אלגברה ליניארית 1 – סמסטר קיץ

תרגיל 2

1. כפול את המטריצות הבאות:

$$א. \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \\ -5 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & -4 \\ 7 & 0 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 9 \\ -2 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$ב. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2012}$$

2. נסמן ב E_{ij} מטריצה ריבועית שמופיע בה 1 במקום ה i,j ואפס בכל שאר המקומות

הראה ש-

- $E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} E_{il} & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$
- לכל $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ AE_{ij} היא מטריצה שכל עמודותיה הן 0 פרט לעמודה ה j השווה לעמודה ה i של A .
- לכל $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ $E_{ij}A$ היא מטריצה שכל שורותיה הן 0 פרט לשורה ה- i השווה לשורה ה- i של A .
- לכל $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ $E_{ij}AE_{kl} = a_{jk}E_{il}$

3. מצא את המטריצה ההפכית של המטריצות הבאות:

$$א. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$ב. \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

ג. עבור אילו ערכי a ו- b מטריצה זו הפיכה? מצא את ההפכית עבור ערכים אלו. $\begin{pmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{pmatrix}$

4.

א. תן דוגמא למטריצה שונה מאפס A כך ש $AC=AB$ אבל $B \neq C$.

ב. נניח ש A הפיכה, הוכח שאם $AB=AC$ אז $C=B$.

ג. תן דוגמא למטריצות A ו B הפיכות כך ש- $A+B \neq 0$ איננה הפיכה.

ד. הראה באמצעות דוגמא ש AB אינה חייבת להיות סימטרית, למרות ש A ו- B סימטריות.

ה. תהיינה A ו B סימטריות. הראה ש AB סימטרית אם ורק אם A ו B מתחלפות (כלומר ש $BA=AB$).

5. יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הוכח או הפרך:

$$\bullet \quad \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^t)$$

$$\bullet \quad \operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$$

$$\bullet \quad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$$

$$\bullet \quad \forall \alpha \in F, \operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr}(A)$$

$$\bullet \quad \operatorname{tr}(A^{-1}) = \frac{1}{\operatorname{tr}(A)}$$

6. תהא $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ המקיימת $A^2 = -I$ הוכח או הפרך:

א. $A^3 = A^{-1}$

ב. $I - A = A^{-1}$

ג. A לא בהכרח הפיכה

7. אילו מקב' המטריצות הריבועיות הבאות סגורות לכפל?

א. מטריצות משולשיות עליונות

ב. מטריצות הפיכות

ג. מטריצות משולשיות

ד. מטריצות אלכסוניות

ה. מטריצות סקלריות