

אלגברה ליניארית 1 – סמסטר קיץ

תרגיל 2

1. כפול את המטריצות הבאות:

$$א. \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \\ -5 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & -4 \\ 7 & 0 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 9 \\ -2 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$ב. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2012}$$

2. נסמן ב  $E_{ij}$  מטריצה ריבועית שמופיע בה 1 במקום ה  $i,j$  ואפס בכל שאר המקומות

הראה ש-

- $E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} E_{il} & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$
- לכל  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$   $AE_{ij}$  היא מטריצה שכל עמודותיה הן 0 פרט לעמודה ה- $j$  השווה לעמודה ה- $i$  של  $A$ .
- לכל  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$   $E_{ij}A$  היא מטריצה שכל שורותיה הן 0 פרט לשורה ה- $i$  השווה לשורה ה- $j$  של  $A$ .
- לכל  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$   $E_{ij}AE_{kl} = a_{jk}E_{il}$

3. מצא את המטריצה ההפכית של המטריצות הבאות:

$$א. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$ב. \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

ג. עבור אילו ערכי  $a$  ו- $b$  מטריצה זו הפיכה? מצא את ההפכית עבור ערכים אלו.  $\begin{pmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{pmatrix}$

4.

א. תן דוגמא למטריצה שונה מאפס  $A$  כך ש  $AC=AB$  אבל  $B \neq C$ .

ב. נניח ש  $A$  הפיכה, הוכח שאם  $AB=AC$  אז  $C=B$ .

ג. תן דוגמא למטריצות  $A$  ו  $B$  הפיכות כך ש-  $A+B \neq 0$  איננה הפיכה.

ד. הראה באמצעות דוגמא ש  $AB$  אינה חייבת להיות סימטרית, למרות ש  $A$  ו-  $B$  סימטריות.

ה. תהיינה  $A$  ו  $B$  סימטריות. הראה ש  $AB$  סימטרית אם ורק אם  $A$  ו  $B$  מתחלפות (כלומר ש  $BA=AB$ ).

5. יהיו  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  הוכח או הפוך:

$$\bullet \quad \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^t)$$

$$\bullet \quad \operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$$

$$\bullet \quad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$$

$$\bullet \quad \forall \alpha \in F, \operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr}(A)$$

$$\bullet \quad \operatorname{tr}(A^{-1}) = \frac{1}{\operatorname{tr}(A)}$$

6. תהא  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  המקיימת  $A^2 = -I$  הוכח או הפוך:

א.  $A^3 = A^{-1}$

ב.  $I - A = A^{-1}$

ג.  $A$  לא בהכרח הפיכה

7. אילו מקב' המטריצות הריבועיות הבאות סגורות לכפל?

א. מטריצות משולשיות עליונות

ב. מטריצות הפיכות

ג. מטריצות משולשיות

ד. מטריצות אלכסוניות

ה. מטריצות סקלריות