

פתרון מבחן מועד א' בקורס 88133

חשבון אינפיניטסימלי 2

שאלה 1. חשב את הביטוי $\int_0^1 e^{-t^2} dt$ בקירוב של מאית. הצדק את צעדיך.

פתרון: בטור מקלורן של e^x : $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ נציב $x = -t^2$ ונקבל את הטור: $e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!}$.

רדיוס ההתכנסות של טור החזקות הזה הוא ∞ ולפיכך הטור מתכנס במידה שווה בכל קטע סופי ב- \mathbb{R} .
אם כן בפרט באינטרוול הנתון, האינטגרל של הטור שווה לטור האינטגרלים:

$$\int_0^1 e^{-t^2} dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{t^{2k+1}}{2k+1} \Big|_0^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}$$

קיבלנו טור לייבניץ. שאריתו מקיימת: $|r_n| < a_{n+1}$. לפיכך נדרוש: $\frac{1}{(n+1)!(2n+3)} < \frac{1}{100}$

זה נכון החל מ- $n=3$, כלומר נזדקק לפיתוח מסדר 3: $\int_0^1 e^{-t^2} dt \approx 1 - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5!} - \frac{1}{4 \cdot 7!}$

שאלה 2. קבע היכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(\arctan x)^n}{1+x^2}$ מתכנס במידה שווה. נמק!

פתרון: אם נציב $t = \arctan x$ נקבל טור חזקות $\frac{1}{1+x^2} \sum_{n=1}^{\infty} nt^n$ המתכנס נקודתית ב- $(-1, 1)$ ובמ"ש בכל

קטע סגור בתוכו. במושגים של x נקבל כי הטור מתכנס במ"ש בכל קטע סגור המוכל ב- $(-\tan 1, \tan 1)$.

שאלה 3. חשב את הגבול: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_1^x \cos \frac{1}{t} dt$. הצדק את צעדיך (רמז: אין צורך לחשב את האינטגרל).

פתרון: האינטגרל הלא אמיתי מסוג ראשון: $\int_1^{\infty} \cos \frac{1}{t} dt$ שווה לאינסוף. ניתן לראות זאת למשל ע"י השוואה

לאינטגרל $\int_1^{\infty} 1 \cdot dt$ שמתבדר. כלומר גבול הפונקציה $F(x) = \int_1^x \cos \frac{1}{t} dt$ (שהיא הקדומה של $\cos \frac{1}{x}$)

כאשר $x \rightarrow \infty$ הוא אינסוף. אם כן הביטוי המבוקש הוא גבול של מנה של שתי פונקציות, השואפות כל אחת לאינסוף.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_1^x \cos \frac{1}{t} dt}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \xrightarrow{L'Hopital} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x}}{1} = 1 \quad \text{ניעזר במשפט לופיטל:}$$

הגזירה של המונה מתבססת על המשפט היסודי של החדו"א ונוסחת ניוטון-לייבניץ.

שאלה 4.

א. הראה כי הפרש של שתי סדרות פונקציות המתכנסות במ"ש בקטע מתכנס אף הוא במ"ש שם.

ב. הראה כי אם טור פונקציות $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ מתכנס במ"ש בקטע I , אז גם סדרת הפונקציות

$\{f_k(x)\}$ מתכנסת במ"ש לאפס ב- I (אפשר להיעזר בתוצאה של סעיף א').

פתרון:

א. תהיינה שתי סדרות המתכנסות במ"ש בקטע $I: a_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a(x), b_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b(x)$

כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ (הגדול מבין השניים שמתקבלים בסדרות) כך ש:

$$\forall n > n_0, x \in I: |a_n(x) - a(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, |b_n(x) - b(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

לפיכך:

$$\begin{aligned} \forall n > n_0, x \in I: |a_n(x) - b_n(x) - (a(x) - b(x))| &= |a_n(x) - a(x) - (b_n(x) - b(x))| \\ &\leq |a_n(x) - a(x)| + |b_n(x) - b(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

כלומר הפרש הסדרות $a_n(x) - b_n(x)$ מתכנס במ"ש ב- I לפונקציה הגבול: $a(x) - b(x)$.

ב. טור פונקציות מתכנס במ"ש בקטע אם הסס"ח שלו $S_n(x)$ מתכנסת במ"ש לסכום: $S(x)$.

נרשום: $f_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S(x) - S(x) = 0$ ונקבל על סמך סעיף א'

שההתכנסות היא במ"ש לאפס בקטע.

$$\text{שאלה 5. הראה כי: } \frac{1}{2e} \ln 2 \leq \int_0^{\pi/4} e^{-x^2} \tan x dx \leq \frac{1}{2} \ln 2 \quad \text{נמק!}$$

פתרון: עפ"י משפט ערך הממוצע האינטגרלי קיימת נקודה $0 < c < \frac{\pi}{4}$ בה מתקיים:

$$\int_0^{\pi/4} e^{-x^2} \tan x dx = e^{-c^2} \int_0^{\pi/4} \tan x dx$$

$$dt = -\sin x dx$$

לגבי האינטגרל שנתר: $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int_0^{\pi/4} \tan x dx$ נציב: $t = \cos x$ ונקבל: $t: 1 \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int_1^{1/\sqrt{2}} \frac{dt}{t} = \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{dt}{t} = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2$$

ולפיכך:

$$\frac{1}{e} < e^{-c^2} < 1 \iff 1 < e^{c^2} < e \iff 0 < c^2 < 1 \iff 0 < c < \frac{\pi}{4} < 1$$

כמו כן נרשום:

כעת אם נכפיל את שתי התוצאות שקיבלנו נקבל את התוצאה המבוקשת.

שאלה 6. יהא C מספר קבוע ותהא $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a, b]$ כך שבכל נקודה

$$\int_a^b f(x) dx = C(b-a)$$

רציונלית בקטע מתקיים $f(x) = C$. הראה כי בהכרח:

פתרון: בכל חלוקה של $[a, b]$, בכל תת-קטע של החלוקה, נמצא בהכרח מספר רציונלי. ולכן לכל $\delta > 0$

קיימת חלוקה T עם $\lambda(T) < \delta$ ובחירת נקודות רציונליות בה כך שסכום רימן המתקבל הוא:

$$\sum_{i=1}^n C \cdot \Delta x_i = C(b-a)$$

נתון שהפונקציה היא אינטגרבילית בקטע, כלומר שגבול כל סכומי הרימן הוא

מספר אחד. מכאן שהוא חייב להיות עפ"י בחירת הנקודות הרציונליות ל: $C(b-a)$.