

מבחן באלגברה לינארית 1 88-112.

סמסטר קיץ תש"ע. מועד א.

מרצים: ד"ר אלי בגנו, ד"ר אפי כהן.

חומר עזר: ראש פתוח.

משך הבחינה: שלש שעות.

הוראות הפעלה:

בבחינה שני חלקים. בחלק הראשון שלש שאלות, מתוכן יש לענות על שתיים **בדיוק** באופן מפורט ומדוייק. כל תשובה נכונה ומפורטת מזכה ב 25 נקודות.

בחלק השני 6 שאלות, מתוכן יש לענות על 5 **בדיוק בטבלה בעמוד זה**, לפי ההוראות שבגוף השאלה. כל שאלה בחלק זה מזכה ב 10 נקודות לכל היותר.

שימו לב: המחברות משמשות לטייטא בלבד, הן לא יבדקו.

F הוא שדה כלשהוא אם לא נאמר אחרת.

בכל אחת מהשאלות שבחרת מתוך 4-9 (פרט לשאלה 7) עליך לסמן כן/ לא בטבלה זו ליד כל סעיף בהתאם לנכונות הטענה.

שאלה	ציון
1	בדף השאלה
2	בדף השאלה
3	בדף השאלה
4	א ב ג ד
5	א ב ג ד
6	א ב ג ד
7	
8	א ב ג ד
ס"ה	

חלק א

כתוב את התשובה המפורטת לשאלה זו בדף זה

שאלה 1

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F כך שב F $1+1 \neq 0$ (מתמטיקאים אומרים בקיצור: המאפיין אינו 2). תהי $T \in \text{Hom}(V, V)$ המקיימת $T^2 = I$. נסמן:

$$U = \{u \in V \mid T(u) = -u\} \text{ ו } W = \{w \in V \mid T(w) = w\}$$

א. הראה ש U הוא תת מרחב של V . (כמובן, גם W הוא תת מרחב של V , אל תוכיח זאת!).

$$\forall u, w \in U, \alpha \in F : T(u + \alpha w) = Tu + \alpha Tw = -u - \alpha w \Rightarrow u + \alpha w \in U \quad \text{פתרון:}$$

$$T(0) = 0 = -0 \Rightarrow 0 \in U$$

ב. הראה שאם $T(v) = z$ אז $v + z \in W$ ו $v - z \in U$.

פתרון:

$$\begin{aligned} T(v+z) &= Tv + Tz = z + TTv = z + Iv = z + v \Rightarrow v+z \in W \\ T(v-z) &= Tv - Tz = z - TTv = z - Iv = z - v = -(v-z) \Rightarrow v-z \in U \end{aligned}$$

ג. הוכח כי $V = U \oplus W$.

פתרון:

נוכיח ש $U \cap W = 0$. נניח $v \in U \wedge v \in W$ לכן $(1+1)v = 0 \Rightarrow v = Tv = -v \Rightarrow (1+1)v = 0$ ש $1+1 \neq 0$ יש לו הופכי בשדה, נכפול בו בשני צידי המשוואה לקבל $v = 0 \cdot (1+1)^{-1} \Rightarrow v = 0$

ד. הוכח או הפרך: בהנחה ש $\dim V \geq 2$, לכל $v \in V$ מתקיים $T(v) = v$ או $T(v) = -v$.

הפרכה:

נפריך. ניקח $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ כך ש $T(1,0) = -(1,0)$ ו $T(0,1) = (0,1)$. נובע בקלות ש $T(a,b) = (-a,b)$ ולכן

$$\begin{aligned} T^2(a,b) &= T(-a,b) = (a,b) \text{ לכן } T^2 = I \text{ אבל עבור } v = (1,1) \\ T v &= (-1,1) \neq \pm(1,1) \end{aligned}$$

כתוב את התשובה המפורטת לשאלה זו בדף זה

שאלה 2

$$א. \begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

נתונה המערכת

עבור אילו ערכים של הפרמטר a למערכת:

יש פתרון יחיד. במקרה זה פתור את המערכת.

אין פתרונות.

יש אינסוף פתרונות. רשום פתרון כללי.

פתרון:

נעביר למטריצה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - aR_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array} \right)$$

לכן אם $a \neq -2, 1$ יש איבר פותח בכל עמודה ואין שורת סתירה לכן יש פתרון יחיד. נמשיך לדרג במקרה זה על מנת למצוא אותו

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & (a+2)(1-a) & 1-a \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 \cdot \frac{a-1}{(a+2)(1-a)} \\ R_3 \cdot \frac{1}{(a+2)(1-a)}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & \frac{a+1}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - aR_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{array} \right)$$

ולכן הפתרון היחיד יהיה $\left(\frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2} \right)$ עבור $a \neq -2, 1$.

כאשר $a = 1$ נחזור למטריצה לפני הפעולות הלא חוקיות במקרה זה ונקבל זהו $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

מצב של אינסוף פתרונות והפתרון הכללי הינו $(1-t-as, t, s)$

כאשר $a = -2$ נחזור למטריצה לפני הפעולות הלא חוקיות במקרה זה ונקבל יש $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$

שורת סתירה ולכן אין פתרונות במצב זה.

ב. יהיו U, W תת המרחבים של \mathbb{R}^4 המוגדרים ע"י:

כאשר $U = \text{Sp}((2,1,1,0), (1,0,1,1), (4,1,3,5))$, W הוא מרחב הפתרונות של המערכת $Ax = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{מצא בסיס עבור } U \cap W$$

פתרון:

קל לראות ש A הפיכה, $Ax = 0 \Leftrightarrow x = A^{-1}0 \Leftrightarrow x = 0$ לכן הפתרון היחיד למערכת ההומוגנית הוא הטריבויאלי ולכן $W = \{0\}$.

ולכן $U \cap W = \{0\}$ והבסיס למרחב שמכיל רק את אפס הוא הקבוצה הריקה.

כתוב את התשובה המפורטת לשאלה זו בדף זה

שאלה 3

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F עם בסיס $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. נסמן

$$C = \{v_1 + v_n, v_2 + v_n, \dots, v_{n-1} + v_n, v_n\}$$

א. הוכח כי C הוא בסיס של V .

פתרון:

נוכיח כי הוא בת"ל ופורש.

פורש: ברור ש $\text{span}C \subseteq V$.

יהי $v \in V$ לכן $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. לכן

$$v = \alpha_1(v_1 + v_n) + \dots + \alpha_{n-1}(v_{n-1} + v_n) + (-\alpha_1 - \dots - \alpha_{n-1} + \alpha_n)v_n$$

לכן $V = \text{span}C$ ולכן סה"כ $V = \text{span}C$

בת"ל: נניח $0 = \beta_1(v_1 + v_n) + \dots + \beta_{n-1}(v_{n-1} + v_n) + \beta_n v_n$ לכן

$$0 = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{n-1} v_{n-1} + (\beta_1 + \dots + \beta_n) v_n = 0$$

בת"ל ולכן הוא טירוויאלי כלומר $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{n-1} = 0$ וגם $\beta_1 + \dots + \beta_n = 0$ ולכן

$$0 + 0 + \dots + 0 + \beta_n = 0 \Rightarrow \beta_n = 0$$

הוא הטירוויאלי וכך הוכחנו בת"ל.

סה"כ C בת"ל ופורש את V ולכן הוא בסיס.

ב. מצא מטריצת מעבר מ B אל C .

פתרון:

$$[I]_C^B = ([I]_B^C)^{-1}$$

$$[I]_B^C = \left([v_1 + v_n]_B \quad \dots \quad [v_{n-1} + v_n]_B \quad [v_n]_B \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$[I]_C^B = ([I]_B^C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ולכן}$$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 3 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix} \text{ ג. יהי } T \in \text{Hom}(V, V) \text{ כך ש}$$

מצא את $[T]_C$.

פתרון:

$$[T]_C = [I]_C^B [T]_B [I]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & 3 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & 3 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & 0 \\ -1 & -2 & \dots & -n-1 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & 3 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & 0 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 & n \end{pmatrix}$$

חלק ב'

שאלה 4

נניח שיש פתרון שאינו אפס למערכת המשוואות, בעלת n שורות ו n עמודות, $Ax = 0$ מעל השדה Z_5 .

סמן בטבלה את הטענות שבהכרח נכונות.

א. קיים $b \in Z_5^n$ כך שיש פתרון יחיד למערכת $Ax = b$.

הפרכה:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ לכן לאף b אין פתרון פרט ל $b = 0$ עבורו יש פתרונות כמספר האיברים

בשדה בריבוע (ובשדה יש לפחות 2 איברים – אפס ואחד)

ב. קיים $b \in Z_5^n$ כך שאין פתרון למערכת $Ax = b$.

הוכחה:

אני מוכיח מבלי לפרט כפי שראוי במבחן, כי זו שאלה סגורה. A אינה הפיכה (כי אחרת לא היה פתרון למערכת ההומוגנית פרט לאפס) ולכן קיימת מטריצה $E \neq 0$ כך ש $EA = 0$ (כי שורות A תלויות לינארית, תחשבו איך למצוא מטריצה כזו). ברור שקיים i כך ש $Ee_i \neq 0$ (זה ה i כך ש $C_i(E) \neq 0$).

נניח בשלילה ש $Ax = e_i$ נכפול ב E בשני האגפים לקבל $0 = EAx = Ee_i \neq 0$ סתירה.

ג. קיים $b \in Z_5^n$ כך שיש אין סוף פתרונות למערכת $Ax = b$.

הפרכה:

מעל שדה סופי, לא ייתכנו אינסוף פתרונות לעולם. יש לכל היותר גודל השדה בחזקת מספר המשתנים פתרונות.

ד. למטריצה A דרגה n .

הפרכה:

כפי שאמרנו, A אינה הפיכה ולכן בהכרח דרגתה קטנה מ n .

שאלה 5

סמן בטבלה את הטענות שבהכרח נכונות.

א. אם $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה של n וקטורים בלתי תלויים במרחב וקטורי V אז כל תת קבוצה של A היא בלתי תלויה לינארית.

הוכחה:

כל צירוף לינארי של תת קבוצה הוא מקרה פרטי של צ"ל של הקבוצה הגדולה עם אפסים במקומות המתאימים. המקרה קצה היחיד הוא הקבוצה הריקה, והיא אכן בת"ל.

ב. אם $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה פורשת של n וקטורים במרחב וקטורי V אז כל תת קבוצה של V המכילה את A פורשת את V .

הוכחה:

הצ"ל הלינאריים של A הם מקרה פרטי של צ"ל של קבוצה שמכילה את A

ג. הקבוצה $\{(1, i), (2, i), (i, -i)\}$ תלויה לינארית ב C^2 כמרחב וקטורי מעל R .

הפרכה:

ניקח צ"ל שמתאפס $(0, 0) = a(1, i) + b(2, i) + c(i, -i) = (a + 2b + ci, (a + b - c)i)$ לכן

$$a + 2b = 0$$

$$a + 2b + ci = 0$$

$$(a + b - c)i = 0$$

כאשר $a, b, c \in \mathbb{R}$ ולכן $c = 0$ קל לראות ש $a = b = c = 0$ בהכרח, ולכן $a + b - c = 0$

הקבוצה בת"ל.

ד. הקבוצה $\{1, x^2, (x+1)^2\}$ תלויה לינארית ב $\mathfrak{R}_2[x]$ כמרחב וקטורי מעל \mathfrak{R} .

הפרכה:

$$a + c = 0$$

$$2c = 0$$

$$b + c = 0$$

לכן $0 = a \cdot 1 + bx^2 + c(x+1)^2 = a + c + 2cx + (b+c)x^2$ ושוב הצ"ל היחיד שמתאפס

הוא הטריוויאלי, ולכן הקבוצה בת"ל.

שאלה 6

סמן בטבלה את הטענות שבהכרח נכונות.

תהי $T: \mathfrak{R}_3[x] \rightarrow \mathfrak{R}$ ההעתקה המוגדרת ע"י: לכל $p(x) \in \mathfrak{R}_3[x]$, $T(p(x)) = p(0)$ ותהי

$$S: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}_3[x] \text{ ההעתקה המוגדרת ע"י: לכל } a \in \mathfrak{R} \quad T(a) = a(x^3 + 1)$$

א. S היא לינארית.

הוכחה:

טריוויאלי להוכיח.

ב. $\dim \text{Ker} T = 3$

הוכחה:

המימד של מרחב הפולינומים $\mathbb{R}_3[x]$ היא 4. לכן לפי סעיף ג' ומשפט הדרגה

$$4 = \dim \mathbb{R}_3[x] = \dim \text{Im} T + \dim \text{ker} T = \dim \mathbb{R} + \dim \text{ker} T = 1 + \dim \text{ker} T$$

ברורה.

ג. $\text{Im} T = \mathfrak{R}$

הוכחה:

ניקח $p(x) = a \Rightarrow Tp = a$ לכן T על והתשובה ברורה

$$ד. \text{אם } B = (1, x, x^2, x^3) \text{ אז } \text{Tr}([S \circ T]_B) = 0$$

הפרכה:

$$S \circ T(a + bx + cx^2 + dx^3) = S(a) = a(x^3 + 1)$$

$$\text{Tr}([S \circ T]_B) = 1 \text{ ולכן } [S \circ T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 7

הגדר **שנים** מתוך המושגים הבאים במקום המיועד לכך בטבלה: (כל סעיף = 5 נקודות).

(1) קבוצה בלתי תלוייה לינארית..

(2) $Hom(V, W)$.

(3) $Ker T$

שאלה 8

$$T(1,1,2) = (-1,1,4)$$

תהי $T: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ העתקה המקיימת:

$$T(2,1,1) = (0,1,3)$$

$$T(4,1,-1) = (2,1,1)$$

סמן בטבלה את הטענות שבהכרח נכונות.

פתרון:

קל לראות ש $-2(1,1,2) + 3(2,1,1) = (4,1,-1)$. כמו כן קל לראות ש $\{(1,1,2), (2,1,1)\}$ בת"ל.

רואים בנוסף שאם נגדיר
נובע $T(1,1,2) = (-1,1,4)$
 $T(2,1,1) = (0,1,3)$

ש $T(4,1,-1) = -2T(1,1,2) + 3T(2,1,1) = -2(-1,1,4) + 3(0,1,3) = (2,1,1)$ ולכן השורה השלישית פשוט נובעת משתי הראשונות.
א. T אינה יכולה להיות לינארית.

הפרכה:

מכיוון שהשורה השלישית אינה סותרת את הראשונות, וניתן להשלים את $\{(1,1,2), (2,1,1)\}$ לבסיס ולפי משפט ההגדרה אפשר להגדיר אינסוף העתקות לינאריות שמקיימות את שלושת המשוואות.
ב. יש T לינארית המקיימת תנאים אלה והגרעין שלה חייב להיות בעל מימד גדול מ 1.

הפרכה:

אמנם יש T כזו, אבל מימד התמונה הוא לפחות 2 ולכן מימד הגרעין הוא לכל היותר 1 בוודאי לא חייב להיות יותר מאד.

ג. יש אין סוף אפשרויות עבור T לינארית המקיימת תנאים אלה.

הוכחה:

הראנו לפי משפט ההגדרה (לאחר ההשלמה לבסיס, ניתן לשלוח את הוקטור המשלים לכל וקטור שנרצה במרחב – יש אינסוף אפשרויות וכמובן שהן שונות).
ד. אין T לינארית המקיימת תנאים אלה שהיא גם על.

הפרכה:

$\{(-1,1,4), (0,1,3)\}$ בת"ל ולכן ניתן להשלים גם אותה לבסיס. אפשר לשלוח את המשלים לבסיס המקור למשלים לבסיס הזה וכך לקבל איזומורפיזם שהוא בוודאי על.

שאלה 9

ממן בטבלה את הטענות שבהכרח נכונות.

א. יהיו $A, B \in M_2(\mathbb{R})$. אז $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3B^2A + B^3$.

הפרכה:

אני אעלה מאוחר יותר גרסא מעודכנת עם דוגמא נגדית לסעיף הזה. בגדול הסיבה היא שאין חילופיות.

ב. לכל שתי מטריצות $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ולכל וקטור $v \in \mathbb{R}^n$ מתקיים: "אם $Av = Bv$ אז $A = B$ ".

הפרכה:

$$A \neq B \text{ אבל } A0 = B0 \text{ . } A = I, B = 0, v = 0$$

ג. לכל $T \in \text{Hom}(F^n, F^n)$ שהיא על ולכל $v, w \in F^n$ מתקיים $T(v) = T(w) \Rightarrow v = w$.

הוכחה:

$T: V \rightarrow V$ כאשר $\dim V = n$ אם T על אז מימד התמונה הוא n ולכן לפי משפט הדרגה מימד הגרעין הוא אפס ולכן ההעתקה חח"ע ולכן המשפט נכון.

ד. אם למערכת משוואות לינאריות יש אין סוף פתרונות אז היא חייבת להיות הומוגנית.

הפרכה:

למערכת $x + y = 1$ יש אינסוף פתרונות מהצורה $(1-t, t)$.