

# מתמטיקה בדידה – תרגיל 6

## שאלה 1

בכל אחד מהסעיפים נתונה קבוצה  $X$  ויחס  $R$  על הקבוצה. עבור כל יחס קבע האם הוא יחס סדר, יחס סדר חזק<sup>1</sup> ולאו יחס סדר מלא. (ייתכן שיותר מאחד מהם. שימו לב שיחס סדר מלא הוא יחס סדר.)

- $X = \mathbb{R}, R = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid e^a \leq e^b\}$
- $X = \mathbb{R}, R = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \leq b^2\}$
- $X = \mathbb{N}, R = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n^2 < m\}$

## פיתרון

**פתרון 1:** יחס סדר כי:

$R$  טרנזיטיבי: נניח כי  $aRb$  ו- $bRc$ . אזי  $e^a \leq e^b$  ו- $e^b \leq e^c$ . לכן  $e^a \leq e^c$  (כי היחס  $\leq$  על  $\mathbb{R}$  הוא טרנזיטיבי).

$R$  רפלקסיבי: יהי  $a \in \mathbb{R}$ , אזי  $e^a \leq e^a$  ולכן  $aRa$ .

$R$  אנטיסימטרי: נניח  $aRb$  ו- $bRa$ . אזי  $e^a \leq e^b$  ו- $e^b \leq e^a$ . היות ו- $\leq$  על  $\mathbb{R}$  הוא יחס סדר נובע ש- $e^a = e^b$ . נפעיל  $\ln$  על שני האגפים ונקבל  $a = b$ , כדרוש.

**דרך אחרת:** לכל  $a, b$  ממשיים מתקיים  $e^a \leq e^b$  (בדקו!) אם ורק אם  $a \leq b$ . לכן

$$R = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid e^a \leq e^b\} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq b\}$$

כלומר,  $R$  הוא היחס  $\leq$  על  $\mathbb{R}$  ולכן זה יחס סדר.

## פתרון 2:

$R$  לא יחס סדר כי הוא לא אנטי סימטרי. באמת,  $(-1)R1$  כי  $1^2 \leq (-1)^2$  ו- $1R(-1)$  כי  $(-1)^2 \leq 1^2$  אבל  $1 \neq -1$  (בניגוד למה שהיה נובע מאנטיסימטריות אם אכן הייתה מתקיימת).

$R$  לא יחס סדר חזק כי הוא לא א-רפלקסיבי. באמת,  $1R1$  כי  $1^2 = 1^2$ .

## פתרון 3:

$R$  טרנזיטיבי: נניח כי  $nRm$  ו- $mRk$ , אזי  $n^2 < m$  ו- $m^2 < k$ . מאי-השוויון הראשון נובע

$$n^4 < m^2 \text{ ולכן } n^4 < k \text{ (נובע מטרנזיטיביות היחס } < \text{ על } \mathbb{N}\text{). היות ו-} n \geq 1 \text{ מתקיים}$$

$$n^2 \leq n^4 \text{ ולכן } n^2 < k \text{, כלומר } nRk \text{, כדרוש.}$$

$R$  א-רפלקסיבי: נניח בשלילה שקיים  $n \in \mathbb{N}$  כך ש- $nRn$ . אזי  $n^2 < n$ . אבל היות ו- $n \geq 1$

$$\text{מתקיים } n^2 \geq n \text{ וזו סתירה לכך ש-} n^2 < n.$$

$R$  אינו יחס סדר כי הוא לא רפלקסיבי. לדוגמא, הפסוק  $1R1$  שקרי כי  $1^2$  לא קטן מ-1.

## שאלה 2

מצאו את כל יחסי הסדר המלאים על הקבוצה  $\{4, 5, 6\}$ . הסבירו מדוע אין יחסים סדר מלאים נוספים.

<sup>1</sup> למי שלא זוכר: יחס  $<$  על קבוצה  $A$  הוא יחס סדר חזק אם הוא טרנזיטיבי, א-רפלקסיבי (לכל  $a \in A$ , הפסוק  $a < a$  שקרי) וא-סימטרי (אם  $a < b$  אז לא מתקיים  $b < a$ ). [במילים אחרות: הוא כמו היחס  $<$  על מספרים ממשיים.]

## פיתרון

יחסי הסדר על  $\{4,5,6\}$  הם:

- $(4 \leq 5 \leq 6) \{(4,5), (5,6), (4,6), (4,4), (5,5), (6,6)\}$
- $(4 \leq 6 \leq 5) \{(4,6), (6,5), (4,5), (4,4), (5,5), (6,6)\}$
- $(5 \leq 4 \leq 6) \{(5,4), (4,6), (5,6), (4,4), (5,5), (6,6)\}$
- $(5 \leq 6 \leq 4) \{(5,6), (6,4), (5,4), (4,4), (5,5), (6,6)\}$
- $(6 \leq 4 \leq 5) \{(6,4), (4,5), (6,5), (4,4), (5,5), (6,6)\}$
- $(6 \leq 5 \leq 4) \{(6,5), (5,4), (6,4), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

יש רק שישה יחסי סדר כי יש 3 אפשרויות לבחור את האיבר הקטן ביותר בסדר. לאחר שעשינו זאת, יש 2 אפשרויות לבחור את האיבר הבא בגודלו (לא ניתן לבחור את האיבר הקטן ביותר). האיבר שנשאר חייב להיות האיבר הגדול ביותר. לכן, יש לכל היותר  $3 \cdot 2 = 6$  סדרים שונים על  $\{4,5,6\}$ .

## שאלה 3

תהי  $X$  קבוצה ו- $R$  יחס סדר על  $X$ . נניח כי  $Y \subseteq X$  ונגדיר  $S = R \cap Y \times Y$ .

- הראו כי  $S$  יחס סדר על  $Y$ .
- נניח כי  $X = \mathbb{N}, R = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid m = 0 \pmod n\}$ . הראו כי  $R$  יחס סדר וציירו דיאגרמת הסה של  $S = R \cap Y \times Y$  עבור הקבוצות הבאות:
  - $Y = \{1,2,3,4,5,6\}$
  - $Y = \{1,2,4,6,8,12,24\}$
  - $Y = \{3,5,7,9,11,13,15\}$

## פיתרון

### הוכחת 1:

$S$  טרנזיטיבי: יהיו  $a, b, c \in Y$  כך ש- $aSb$  ו- $bSc$ , כלומר  $(a, b), (b, c) \in S$ . היות ו- $S = R \cap Y \times Y$  מתקיים  $(a, b), (b, c) \in R$ .  $R$  טרנזיטיבי (כי הוא יחס סדר) ולכן  $(a, c) \in R$ . אבל  $(a, c) \in Y \times Y$  ולכן  $(a, c) \in S$ . כלומר  $aSc$ .

$S$  רפלקסיבי: יהי  $a \in Y$ , אזי  $(a, a) \in R$ . היות ו- $R$  רפלקסיבי (כי הוא יחס סדר) מתקיים,  $(a, a) \in R$ . לכן,  $(a, a) \in R \cap Y \times Y = S$ . כלומר  $aSa$ .

$S$  אנטי סימטרי: יהיו  $a, b \in Y$  כך ש- $aSb$  ו- $bSa$ . היות ו- $S \subseteq R$  ו- $R$  נובע ש- $aRb$  ו- $bRa$ . אבל  $R$  אנטיסימטרי (כי הוא יחס סדר) ולכן  $a = b$ .

קיבלנו ש- $S$  טרנזיטיבי, רפלקסיבי ואנטיסימטרי. לכן  $S$  יחס סדר. **משל.**

### פתרון 2:

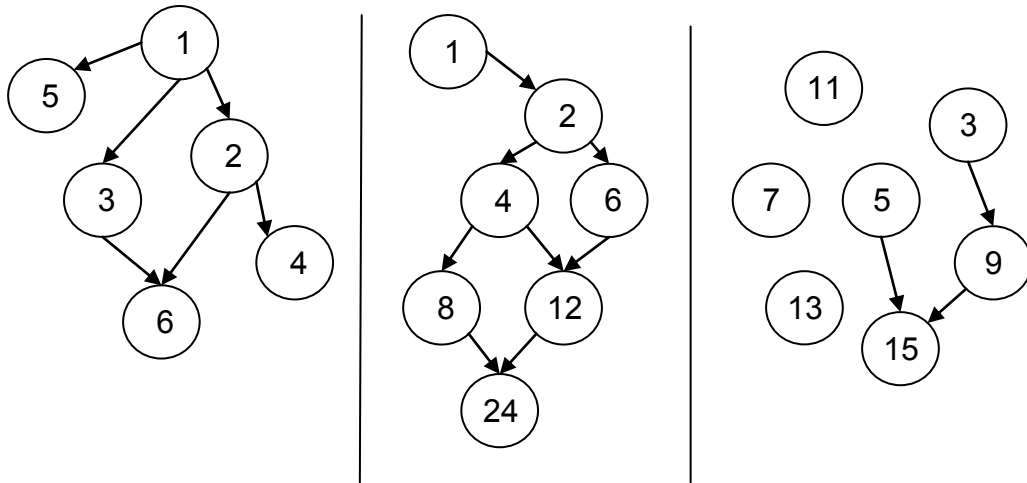
נוכיח ש- $R$  יחס סדר:

$R$  טרנזיטיבי: נניח כי  $mRn, nRk$ , אזי קיימים  $x, y \in \mathbb{N}$  כך ש- $k = nx$  ו- $n = my$ . לכן,  $k = nx = (my)x = m(yx)$ . נובע ש- $k$  מתחלק ב- $m$  ולכן  $mRk$ .

$R$  רפלקסיבי כי כל מספר טבעי מתחלק בעצמו.

$R$  אנטיסימטרי: נניח כי  $mRn$  ו- $nRm$ , אזי קיימים  $x, y \in \mathbb{N}$  כך ש- $m = nx$  ו- $n = my$ . לכן,  $m = nx = (my)x = m(yx)$ . נחלק ב- $m$  ונקבל  $1 = xy$ . היות ו- $x, y \geq 1$  נובע כי בהכרח  $x = 1$  (אחרת נקבל  $xy > 1$ ) ולכן  $m = nx = n$ .

דיארמות הסה:



#### שאלה 4

תהי  $X$  קבוצה ו- $R$  יחס. נגדיר את היחסים הבאים:  
 א.  $R^2 = R \circ R = \{(x, y) \in X \mid \exists z \in X: xRz \wedge zRy\}$   
 ב.  $R^{op} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$   
 ג.  $I = \{(x, x) \mid x \in X\}$   
 הוכיחו כי  $R \cap R^{op} = I$  וגם  $R^2 \subseteq R$  אם ורק אם  $R$  יחס סדר.

#### הוכחה

**כיוון א:** נניח כי  $R$  הוא יחס סדר.  
 נראה ש- $R^2 \subseteq R$ : יהי  $(x, y) \in R^2$  אזי קיים  $z$  כך ש- $xRy \wedge yRz$ . יחס סדר ולכן טרנזיטיבי. לכן נובע  $xRy$ , כלומר  $(x, y) \in R$ .  
 נראה ש- $R \cap R^{op} \subseteq I$ : יהי  $(x, y) \in R \cap R^{op}$ , אזי זה אומר ש- $xRy$  ו- $yRx$ . היות ו- $R$  יחס סדר זה אומר ש- $x = y$ . לכן,  $(x, y) = (x, x) \in I$ .  
 נראה ש- $R \cap R^{op} \supseteq I$ : יהי  $a \in I$ , אזי קיים  $x \in X$  כך ש- $a = (x, x)$ . היות ו- $R$  יחס סדר מתקיים  $xRx$ , אבל זה אומר ש- $xR^{op}x$ . לכן,  $a = (x, x) \in R \cap R^{op}$ .

**כיוון ב:** נניח כי אם  $R^2 \subseteq R$  וגם  $R \cap R^{op} = I$ .  
 נראה ש- $R$  טרנזיטיבי: נניח ש- $xRy$  ו- $yRz$ . אזי לפי הגדרת  $R^2$  מתקיים  $(x, z) \in R^2$ . היות ו- $R^2 \subseteq R$  נובע ש- $(x, z) \in R$ , כלומר  $xRz$ .  
 נראה ש- $R$  רפלקסיבי: יהי  $x \in X$ . מהגדרת  $I$  נובע ש- $(x, x) \in I$ . היות ו- $R \cap R^{op} = I$  מתקיים  $(x, x) \in R \cap R^{op}$  וזה אומר ש- $(x, x) \in R$ , כלומר  $xRx$ .  
 נראה ש- $R$  אנטיסימטרי: נניח ש- $xRy$  ו- $yRx$ , אזי נובע ש- $xR^{op}y$  (כי  $yRx$ ). זה אומר ש- $(x, y) \in R$  וגם  $(x, y) \in R^{op}$ . לכן,  $(x, y) \in R \cap R^{op} = I$ . זה אומר שקיים  $z \in X$  כך ש- $(x, y) = (z, z)$ . מכאן נובע  $x = z$  ו- $y = z$  ולכן  $x = y$ .  
 לסיכום,  $R$  טרנזיטיבי, רפלקסיבי ואנטיסימטרי ולכן יחס סדר.

משל.

#### שאלה 5

תהי  $A$  קבוצה ו- $\leq$  יחס סדר על  $A$ . נגדיר יחס  $R$  על  $A \times A$  ע"י  $(a, b)R(c, d)$  אם  $\{a \leq c\}$  וגם  $\{a \neq c \mid b \leq d\}$  או  $\{a = c\}$ .

הראו כי  $R$  יחס סדר על  $A \times A$ .  
 ציור דיאדרמת הסה של  $R$  עבור  $A = \{0,1,2\}$  ו- $\{(0,0), (1,1), (2,2), (0,1), (0,2)\} \leq$  (אין צורך להוכיח כי זה יחס סדר).

## פתרון

**הוכחה:**

נראה ש- $R$  טרנזיטיבי: נניח ש- $(a, b)R(c, d)$  ו- $(c, d)R(e, f)$ . כלומר:

$$\text{וגם } \{a \leq c \text{ וגם } a \neq c\} \text{ או } \{a = c \text{ וגם } b \leq d\} \text{ וגם } \{c \leq e \text{ וגם } c \neq e\} \text{ או } \{c = e \text{ וגם } d \leq f\}$$

היות ו- $a = c$  גורר  $a \leq c$  ו- $c = e$  גורר  $c \leq e$  נובע שבכל מקרה מתקיים  $a \leq c \leq e$ .  
 מהטרנזיטיביות של  $\leq$  נובע ש- $a \leq e$ .

שימו לב כי הטענה באדום גוררת את הטענה הבאה:

$$\text{או } \{a \leq c \text{ וגם } a \neq c\} \text{ או } \{c \leq e \text{ וגם } c \neq e\} \text{ או } \{b \leq d \text{ וגם } a = c\} \text{ וגם } \{d \leq f \text{ וגם } c = e\}$$

על סמך זאת, נחלק למקרים:

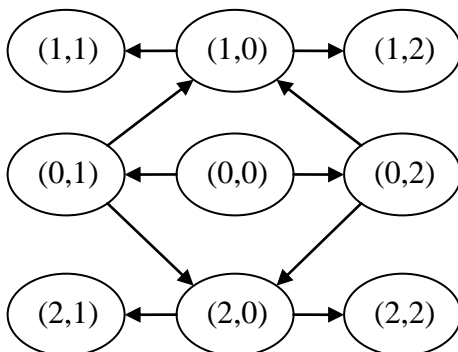
$a \leq c \leq e$  וגם  $a \neq c$  או  $\{c \leq e \text{ וגם } c \neq e\}$ : נניח בשלילה ש- $a = e$ , אזי מתקיים  $a \leq c \leq e$  ולפי האנטיסימטריות של  $\leq$  נובע  $c = a = e$ . קיבלנו  $a = c = e$  וזו סתירה להנחה שלנו שאומרת ש- $a \neq c$  או  $a \neq e$ . לכן,  $a \neq e$ . אבל זה אומר ש- $(a, b)R(e, f)$  ולכן גמרנו.  
 $\{b \leq d \text{ וגם } a = c\}$  וגם  $\{d \leq f \text{ וגם } c = e\}$ : אז  $a = c = e$  ו- $b \leq d \leq f$ . מהטרנזיטיביות של  $\leq$  נובע  $b \leq f$ . לכן, לפי הגדרת  $R$  נובע  $(a, b)R(e, f)$ .  
 בכל מקרה קיבלנו  $(a, b)R(e, f)$  ולכן  $R$  טרנזיטיבי.

נראה ש- $R$  רפלקסיבי: יהי  $(a, b) \in A \times A$ . אזי  $a = a$  ו- $b \leq b$  (כי  $\leq$  רפלקסיבי) ולכן  $(a, b)R(a, b)$ . כדורש.

נראה ש- $R$  אנטיסימטרי: יהיו  $(a, b), (c, d) \in A \times A$  כך ש- $(a, b)R(c, d)$  ו- $(c, d)R(a, b)$ . בהוכחת הטרנזיטיביות של  $R$  הראינו שזה אומר ש- $a \leq c \leq a$  (הציבו  $e = a$  בהוכחה). לכן, מהאנטיסימטריות של  $R$  נובע ש- $a = c$ . לכן:  
 $(a, b)R(c, d)$  גורר ש- $b \leq d$  ו-  
 $(c, d)R(a, b)$  גורר ש- $b \leq d$   
 ושוב, לפי האנטי סימטריות של  $\leq$  נובע  $b = d$ . לכן,  $(a, b) = (c, d)$ .

**משל.**

**בנה דיאדרמת הסה:**



**הדרך לבנייה:** נניח  $(a, b)R(c, d)$ . אם  $a \neq c$  אז יש חץ מ- $(a, b)$  ל- $(c, d)$  אם  $c$  איברים בין  $a$  ל- $c$  (ביחס ל- $\leq$ ) וגם אין איבר גדול מ- $b$  וגם אין איבר קטן מ- $d$  (בדקו!). אם  $a = c$  אז יש חץ מ- $(a, b)$  ל- $(c, d)$  אם  $c$  איברים בין  $b$  ל- $d$  (בדקו!).