מתמטיקה בדידה – תרגיל 6

שאלה 1

בכל אחד מהסעיפים נתונה קבוצה X ויחס R על הקבוצה. עבור כל יחס קבע האם הוא יחס סדר, יחס סדר חזק[1] ו\או יחס סדר מלא. (ייתכן שיותר מאחד מהם. שימו לב שיחס סדר מלא הוא יחס סדר.)

1. $X = \mathbb{R},\ \ R = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid e^a \leq e^b\}$
2. $X = \mathbb{R},\ \ R = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \leq b^2\}$
3. $X = \mathbb{N}, R = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n^2 < m\}$

פיתרון

פתרון 1: R יחס סדר כי:

<u>R טרנזיטיבי:</u> נניח כי aRb ו-bRc. אזי $e^a \leq e^b$ ו-$e^b \leq e^c$. לכן $e^a \leq e^c$ (כי היחס $\leq$ על $\mathbb{R}$ הוא טרנזיטיבי).

<u>R רפלקסיבי:</u> יהי $a \in \mathbb{R}$, אזי $e^a \leq e^a$ ולכן aRa.

<u>R אנטיסימטרי:</u> נניח aRb ו-bRa. אזי $e^a \leq e^b$ ו-$e^b \leq e^a$. היות ו-$\leq$ על $\mathbb{R}$ הוא יחס סדר נובע ש-$e^a = e^b$. נפעיל $\ln$ על שני האגפים ונקבל $a = b$, כדרוש.

דרך אחרת: לכל a, b ממשיים מתקיים $e^a \leq e^b$ (בדקו!) אם ורק אם $a \leq b$. לכן

$$R = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid e^a \leq e^b\} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq b\}$$

כלומר, R הוא היחס $\leq$ על $\mathbb{R}$ ולכן זה יחס סדר.

פתרון 2:

R לא יחס סדר כי הוא לא אנטי סימטרי. באמת, $(-1)R1$ כי $(-1)^2 \leq 1^2$ ו-$1R(-1)$ כי $1^2 \leq (-1)^2$ אבל $1 \neq -1$ (בניגוד למה שהיה נובע מאנטיסימטריות אם אכן הייתה מתקיימת).

R לא יחס סדר חזק כי הוא לא א-רפלקסיבי. באמת, $1R1$ כי $1^2 = 1^2$.

פתרון 3: R יחס סדר חזק.

<u>R טרנזיטיבי:</u> נניח כי nRm ו-mRk, אזי $n^2 < m$ ו-$m^2 < k$. מאי-השוויון הראשון נובע $n^4 < m^2$ ולכן $n^4 < k$ (נובע מטרנזיטיביות היחס $<$ על $\mathbb{N}$). היות ו-$n \geq 1$ מתקיים $n^2 \leq n^4$ ולכן $n^2 < k$, כלומר nRk, כדרוש.

<u>R א-רפלקסיבי:</u> נניח בשלילה שקיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-nRn. אזי $n^2 < n$. אבל היות ו-$n \geq 1$ מתקיים $n^2 \geq n$ וזו סתירה לכך ש-$n^2 < n$.

[R אינו יחס סדר כי הוא לא רפלקסיבי. לדוגמא, הפסוק $1R1$ שקרי כי 1^2 לא קטן מ-1.

שאלה 2

מצאו את כל יחסי הסדר המלאים על הקבוצה $\{4,5,6\}$. הסבירו מדוע אין יחסים סדר מלאים נוספים.

---

[1] למי שלא זוכר\מכיר: יחס $\prec$ על קבוצה A הוא <u>יחס סדר חזק</u> אם הוא <u>טרנזיטיבי</u>, <u>א-רפלקסיבי</u> (לכל $a \in A$, הפסוק $a \prec a$ שקרי) <u>ואי-סימטרי</u> (אם $a \prec b$ אז לא מתקיים $b \prec a$). [במילים אחרות: הוא כמו היחס $<$ על מספרים ממשיים.]

פיתרון

יחסי הסדר על $\{4,5,6\}$ הם:

- $\{(4,5),(5,6),(4,6),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ $(4 \le 5 \le 6)$
- $\{(4,6),(6,5),(4,5),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ $(4 \le 6 \le 5)$
- $\{(5,4),(4,6),(5,6),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ $(5 \le 4 \le 6)$
- $\{(5,6),(6,4),(5,4),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ $(5 \le 6 \le 4)$
- $\{(6,4),(4,5),(6,5),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ $(6 \le 4 \le 5)$
- $\{(6,5),(5,4),(6,4),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ $(6 \le 5 \le 4)$

יש רק שישה יחסי סדר כי יש 3 אפשרויות לבחור את האיבר הקטן ביותר בסדר. לאחר שעשינו זאת, יש 2 אפשרויות לבחור את האיבר הבא בגודלו (לא ניתן לבחור את האיבר הקטן ביותר). האיבר שנשאר חייב להיות האיבר הגדול ביותר. לכן, יש לכל היותר $3 \cdot 2 = 6$ סדרים שונים על $\{4,5,6\}$.

שאלה 3

תהי X קבוצה ו-R יחס סדר על X. נניח כי $Y \subseteq X$ ונגדיר $S = R \cap Y \times Y$.

1. הראו כי S יחס סדר על Y.
2. נניח כי $X = \mathbb{N}, R = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid m = 0(mod\, n)\}$. הראו כי R יחס סדר וציירו דיאגרמת הסה של $S = R \cap Y \times Y$ עבור הקבוצות הבאות:
   a. $Y = \{1,2,3,4,5,6\}$
   b. $Y = \{1,2,4,6,8,12,24\}$
   c. $Y = \{3,5,7,9,11,13,15\}$

פיתרון

הוכחה 1:

S טרנזיטיבי: יהיו $a,b,c \in Y$ כך ש-aSb ו-bSc, כלומר $(a,b),(b,c) \in S$. היות ו-$S = R \cap Y \times Y$ מתקיים $(a,b),(b,c) \in R$. R טרנזיטיבי (כי הוא יחס סדר) ולכן $(a,c) \in R$. אבל $(a,c) \in Y \times Y$ ולכן $(a,c) \in R \cap Y \times Y = S$, כלומר aSc.

S רפלקסיבי: יהי $a \in Y$, אזי $(a,a) \in Y$. היות ו-R רפלקסיבי (כי הוא יחס סדר) מתקיים, $(a,a) \in R$. לכן, $(a,a) \in R \cap Y \times Y = S$, כלומר aSa.

S אנטי סימטרי: יהיו $a,b \in Y$ כך ש-aSb ו-bSa. היות ו-$R \subseteq S$ נובע ש-aRb ו-bRa. אבל R אנטיסימטרי (כי הוא יחס סדר) ולכן $a = b$.

קיבלנו ש-S טרנזיטיבי, רפלקסיבי ואנטיסימטרי. לכן S יחס סדר. **משל.**

פתרון 2:

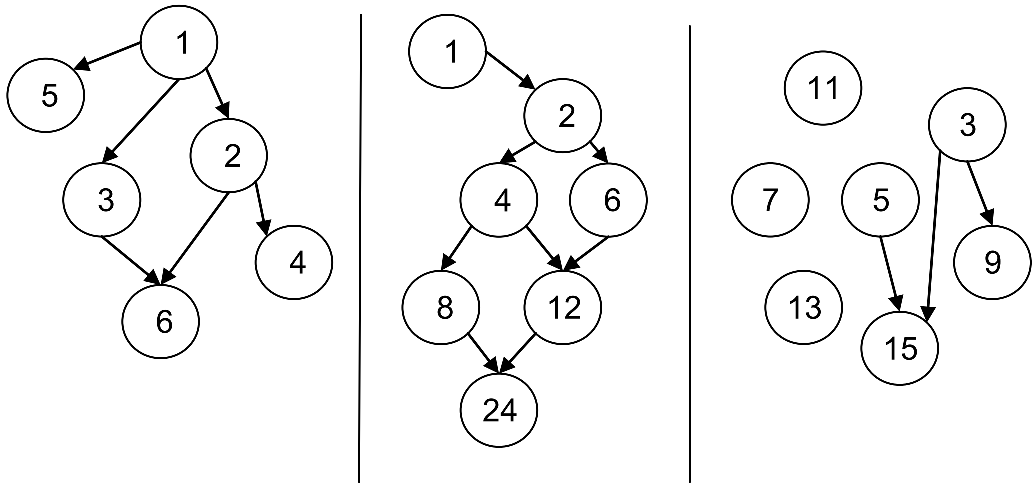
נוכיח ש-R יחס סדר:

R טרנזיטיבי: נניח כי mRn, nRk, אזי קיימים $x,y \in \mathbb{N}$ כך ש-$k = nx$ ו-$n = my$. לכן, $k = nx = (my)x = m(yx)$. נובע ש-k מתחלק ב-m ולכן mRk.

R רפלקסיבי כי כל מספר טבעי מתחלק בעצמו.

R אנטיסימטרי: נניח כי nRm ו-mRn, אזי קיימים $x,y \in \mathbb{N}$ כך ש-$m = nx$ ו-$n = my$. לכן, $m = nx = (my)x = m(yx)$. נחלק ב-m ונקבל $xy = 1$. היות ו-$x,y \geq 1$ נובע כי בהכרח $x = 1$ (אחרת נקבל $xy > 1$) ולכן $m = nx = n$.

דיארמות הסה:



שאלה 4

תהי X קבוצה ו-R יחס. נגדיר את היחסים הבאים:

א. $R^2 = R \circ R = \{(x,y) \in X \mid \exists z \in X: xRz \wedge zRy\}$

ב. $R^{op} = \{(x,y) \mid (y,x) \in R\}$

ג. $I = \{(x,x) \mid x \in X\}$

הוכיחו כי R יחס סדר אם ורק אם $R^2 \subseteq R$ וגם $R \cap R^{op} = I$.

הוכחה

כוון א: נניח כי R הוא יחס סדר.

<u>נראה ש-$R^2 \subseteq R$:</u> יהי $(x,y) \in R^2$ אזי קיים z כך ש-$xRy \wedge yRz$. R יחס סדר ולכן טרניזיטיבי. לכן נובע xRy, כלומר $(x,y) \in R$.

<u>נראה ש-$I \subseteq R \cap R^{op}$:</u> יהי $(x,y) \in R \cap R^{op}$, אזי זה אומר ש-xRy ו-yRx. היות ו-R יחס סדר זה אומר ש-$x = y$. לכן, $(x,y) = (x,x) \in I$.

<u>נראה ש-$I \supseteq R \cap R^{op}$:</u> יהי $a \in I$, אזי קיים $x \in X$ כך ש-$a = (x,x)$. היות ו-R יחס סדר מתקיים xRx, אבל זה אומר ש-$xR^{op}x$. לכן, $a = (x,x) \in R \cap R^{op}$.

כוון ב: נניח כי אם $R^2 \subseteq R$ וגם $R \cap R^{op} = I$.

<u>נראה ש-R טרנזיטיבי:</u> נניח ש-xRy ו-yRz. אזי לפי הגדרת R^2 מתקיים $(x,z) \in R^2$. היות ו-$R^2 \subseteq R$ נובע ש-$(x,z) \in R$ כלומר xRz.

<u>נראה ש-R רפלקסיבי:</u> יהי $x \in X$. מהגדרת I נובע ש-$(x,x) \in I$. היות ו-$R \cap R^{op} = I$ מתקיים $(x,x) \in R \cap R^{op}$ וזה אומר ש-$(x,x) \in R$, כלומר xRx.

<u>נראה ש-R אנטיסימטרי:</u> נניח ש-xRy ו-yRx, אזי נובע ש-$xR^{op}y$ (כי yRx). זה אומר ש-$(x,y) \in R$ וגם $(x,y) \in R^{op}$. לכן, $(x,y) \in R \cap R^{op} = I$. זה אומר שקיים $z \in X$ כך ש-$(x,y) = (z,z)$. מכאן נובע $x = z$ ו-$y = z$ ולכן $x = y$.

<u>לסיכום</u>, R טרנזיטיבי, רפלקסיבי ואנטיסימטרי ולכן יחס סדר.

משל.

שאלה 5

תהי A קבוצה ו-$\leq$ יחס סדר על A. נגדיר יחס R על $A \times A$ ע"י $(a,b)R(c,d)$ אם"ם $\{a \leq c$ וגם $a \neq c\}$ או $\{a = c$ וגם $b \leq d\}$.

הראו כי R יחס סדר על $A\times A$.
ציירו דיאגרמת הסה של R עבור $A=\{0,1,2\}$ ו-$\leq=\{(0,0),(1,1),(2,2),(0,1),(0,2)\}$ (אין צורך להוכיח כי זה יחס סדר).

פתרון

הוכחה:

נראה ש-R טרנזיטיבי: נניח ש-$(a,b)R(c,d)$ ו-$(c,d)R(e,f)$. כלומר:
$\{\{a\leq c$ וגם $a\neq c\}$ או $\{a=c$ וגם $b\leq d\}\}$ וגם
$\{\{c\leq e$ וגם $c\neq e\}$ או $\{c=e$ וגם $d\leq f\}\}$.
היות ו-$a=c$ גורר $a\leq c$ ו-$c=e$ גורר $c\leq e$ נובע שבכל מקרה מתקיים $a\leq c\leq e$. מהטרנזיטיביות של $\leq$ נובע ש-$a\leq e$.
שימו לב כי הטענה באדום גוררת את הטענה הבאה:
$\{\{a\leq c$ וגם $a\neq c\}$ או $\{c\leq e$ וגם $c\neq e\}\}$ או
$\{\{a=c$ וגם $b\leq d\}$ וגם $\{c=e$ וגם $d\leq f\}\}$
על סמך זאת, נחלק למקרים:
$\{a\leq c$ וגם $a\neq c\}$ או $\{c\leq e$ וגם $c\neq e\}$: נניח בשלילה ש-$a=e$, אזי מתקיים $a\leq c\leq e=a$ ולפי האנטיסימטריות של $\leq$ נובע $c=a$. קיבלנו $a=c=e$ וזו סתירה להנחה שלנו שאומרת ש-$a\neq c$ או $c\neq e$. לכן, $a\neq e$. אבל זה אומר ש-$(a,b)R(e,f)$ ולכן גמרנו.
$\{a=c$ וגם $b\leq d\}$ וגם $\{c=e$ וגם $d\leq f\}$: אז $a=c=e$ ו-$b\leq d\leq f$. מהטרנזיטיביות של $\leq$ נובע $b\leq f$. לכן, לפי הגדרת R נובע $(a,b)R(e,f)$.
בכל מקרה קיבלנו $(a,b)R(e,f)$ ולכן R טרנזיטיבי.

נראה ש-R רפלקסיבי: יהי $(a,b)\in A\times A$. אזי $a=a$ ו-$b\leq b$ (כי $\leq$ רפלקסיבי) ולכן $(a,b)R(a,b)$, כדרוש.

נראה ש-R אנטיסימטרי: יהיו $(a,b),(c,d)\in A\times A$ כך ש-$(a,b)R(c,d)$ ו-$(c,d)R(a,b)$.
בהוכחת הטרנזיטיביות של R הראינו שזה אומר ש-$a\leq c\leq a$ (הציבו $e=a$ בהוכחה).
לכן, מהאנטיסימטריות של R נובע ש-$a=c$. לכן:
$(a,b)R(c,d)$ גורר ש-$b\leq d$ ו-
$(c,d)R(a,b)$ גורר ש-$b\leq d$
ושוב, לפי האנטי סימטריות של $\leq$ נובע $b=d$. לכן, $(a,b)=(c,d)$.

משל.

נבנה דיאגרמת הסה:

הדרך לבנייה: נניח $(a,b)R(c,d)$. אם $a\neq c$ אז יש חץ מ-(a,b) ל-(c,d) אם"ם אין איברים בין a ל-c (ביחס ל-$\leq$) וגם אין איבר גדול מ-b וגם אין איבר קטן מ-d (בדקו!). אם $a=c$ אז יש חץ מ-(a,b) ל-(c,d) אם"ם אין איבר בין b ל-d (בדקו!).