תרגיל 4 - חשבון אינפי 3 תש"פ

תרגיל 1. תהי $f:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ פונקציה ונניח שקיים $L\in\mathbb{R}$ כך שלכל מסילה $\gamma:(a,b)\to\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ שמקיימת

$$\lim_{t\to b}\gamma\left(t\right)=0$$

מתקיים

$$.\lim_{t\to b}f\left(\gamma\left(t\right)\right)=L$$

הראו, ש $\lim_{x\to 0}f\left(x\right)=L$. (כלומר, אם על כל מסלול שלאורכו מתקרבים ל 0 מקבלים אותו גבול L אז ל f קיים גבול L).

תרגיל 2. האם הגבולות הבאים קיימים. במידה וכן, מצאו אותם.

.1

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(xy\right)}{x}$$

.

.2

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xyz}{x^4+y^4+z^4}$$

.

.3

$$.\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

.4

$$.\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+3y^2}}$$

תרגיל 3. קבעו האם הפונקציה f רציפה בנקודות a במקרים הבאים:

.1

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{x^{3}+y^{4}}{x^{2}+y^{2}} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$$

ב $a=\left(0,0\right)$.

.2

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}xy\ln\left(x^{2}+y^{2}\right) & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$$

ב $a=\left(0,0\right)$.

.3

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{\sqrt{\left(x-1\right)^{2}+\left(y-2\right)^{2}+1}-1}{\ln\sqrt{\left(x-1\right)^{2}+\left(y-2\right)^{2}+1}} & \left(x,y\right)\neq\left(1,2\right)\\ 1 & \left(x,y\right)=\left(1,2\right)\end{cases}$$

ב $a=\left(1,2\right)$.

.4

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{e^{-\frac{1}{x^{2}}}y}{e^{-\frac{2}{x^{2}}}+y^{2}} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$$

ב $a=\left(0,0\right)$.

תרגיל 4. (סעיף ממבחן). תהי $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$. הראו שהשפה של E, ∂E היא קבוצת נקודות האי-רציפות של הפונקציה

$$\chi_{E}\left(x\right)=\begin{cases}1 & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases}.$$

תרגיל 5. (ממבחן). הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

1. אם הסדרה $\left\{ a_{n}\right\} _{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל a ב $\mathbb{R}^{n}$, אזי $\lim_{n\to\infty}\left\Vert a_{n}\right\Vert =\left\Vert a\right\Vert$.
2. אם הסדרה $\left\{ \left\Vert a_{n}\right\Vert _{n=1}^{\infty}\right\} _{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ב $\mathbb{R}$, אזי הסדרה $\left\{ a_{n}\right\} _{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ב $\mathbb{R}^{n}$.
3. אם הסדרה $\left\{ \left\Vert a_{n}\right\Vert \right\} _{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ב $\mathbb{R}$, אזי לסדרה $\left\{ a_{n}\right\} _{n=1}^{\infty}$ יש תת-סדרה מתכנסת ב $\mathbb{R}^{n}$.

תרגיל 6. (סעיף ממחבן). תהי $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ו $f:A\to\mathbb{R}^{m}$. נאמר, ש f מקיימת את תנאי ליפשיץ, אם קיים $0<M$ כך שלכל $x,y\in A$ מתקיים:

$$\left\Vert f\left(x\right)-f\left(y\right)\right\Vert \leq M\left\Vert x-y\right\Vert .$$

הוכיחו/הפריכו: אם f מקיימת את תנאי ליפשיץ אזי f רציפה.

תרגיל 7. (בונוס)

1. תהי $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה, כאשר $D\subseteq\mathbb{R}^n$, תהי x_0 נקודת הצטברות של D. נניח כי $D=D_1\cup\cdots\cup D_m$ כאשר x_0 היא נקודת הצטברות של כל D_i. הוכיחו שמתקיים

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=L$$

אם ורק אם לכל i מתקיים

$$\lim_{x\to x_0} f|_{D_i}\left(x\right)=L .$$

(רמז: כדאי להשתמש בקריטריון היינה לקיום גבול).

2. הראו שהטענה מהסעיף הקודם אינה נכונה אם לא דורשים שהאיחוד יהיה סופי.

תרגיל 8. (בונוס) תהי $f:\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$. הוכיחו שהגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\left(x,y\right)=L$ קיים, אם ורק אם לכל סדרה $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ שמתכנסת ל 0, סדרת הפונקציות

$$g_n\left(\theta\right)=f\left(r_n\cos\theta,r_n\sin\theta\right)$$

מתכנסת במידה שווה לפונקציה קבועה $g\left(\theta\right)=L$.