תרגיל 4 - חשבון אינפי 3 תש"פ

תרגיל 1. תהי $f:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ פונקציה ונניח שקיים $L\in\mathbb{R}$ כך שלכל מסילה

$$\gamma:(a,b)\to\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$$

שמקיימת

$$\lim_{t\to b}\gamma(t)=0$$

מתקיים

$$\lim_{t\to b}f(\gamma(t))=L.$$

הראו, ש $\lim_{x\to 0}f(x)=L$. (כלומר, אם על כל מסלול שלאורכו מתקרבים ל 0 מקבלים אותו גבול L אז ל f קיים גבול L).

תרגיל 2. האם הגבולות הבאים קיימים. במידה וכן, מצאו אותם.

.1

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{x}$$

.

.2

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xyz}{x^4+y^4+z^4}$$

.

.3

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

תרגיל 3. קבעו האם הפונקציה f רציפה בנקודות a במקרים הבאים:

.1

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ב $a=(0,0)$.

.2

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases} \frac{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+1}-1}{\ln\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+1}} & (x,y)\neq(1,2)\\ 1 & (x,y)=(1,2)\end{cases}$$

ב $a=(1,2)$.

.3

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}y}{e^{-\frac{2}{x^2}}+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ב $a=(0,0)$.

תרגיל 4. (סעיף ממבחן). תהי $E\subseteq\mathbb{R}^n$. הראו שהשפה של E, ∂E היא קבוצת נקודות האי-רציפות של הפונקציה

$$\chi_E\left(x\right)=\begin{cases}1 & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases}.$$

תרגיל 5. (ממבחן). הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

1. אם הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל a ב $\mathbb{R}^n$, אזי $\lim_{n\to\infty}\|a_n\|=\|a\|$.
2. אם הסדרה $\{\|a_n\|_{n=1}^{\infty}\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ב $\mathbb{R}$, אזי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ב $\mathbb{R}^n$.
3. אם הסדרה $\{\|a_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ב $\mathbb{R}$, אזי לסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ יש תת-סדרה מתכנסת ב $\mathbb{R}^n$.

תרגיל 6. (סעיף ממחבן). תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ו $f:A\to\mathbb{R}^m$. נאמר, ש f מקיימת את תנאי ליפשיץ, אם קיים $M>0$ כך שלכל $x,y\in A$ מתקיים:

$$\|f\left(x\right)-f\left(y\right)\|\leq M\left\|x-y\right\|.$$

הוכיחו/הפריכו: אם f מקיימת את תנאי ליפשיץ אזי f רציפה.