מתמטיקה בדידה 88-195 תשע"ד

תרגיל בית מספר 7

מתרגלים: רועי בן-ארי ולידור אלדבח

1. הוכיחו או הפריכו:

א) $\left|\left\{n^2 \mid n\in\mathbb{Z}_{11}\right\}\right| = \left|\mathbb{Z}_{11}\right|$.

ב) $\left|\left\{n^2 \mid n\in\mathbb{Z}\right\}\right| = \left|\mathbb{Z}\right|$.

ג) אם $|A|=|B|$ וגם $f:A\to B$ חח"ע אזי f על.

ד) אם $|A|=|B|=n\in\mathbb{N}$ וגם $f:A\to B$ חח"ע אזי f על.

פיתרון:

א) לא נכון. $\left|\left\{n^2 \mid n\in\mathbb{Z}_{11}\right\}\right| = 6 \neq 11 = \left|\mathbb{Z}_{11}\right|$

ב) נכון. $\left|\left\{n^2 \mid n\in\mathbb{Z}\right\}\right| = \left|\mathbb{N}\cup\{0\}\right| = \left|\mathbb{Z}\right|$ כאשר n^2 העתקה חח"ע ועל מ- $\mathbb{N}\cup\{0\}$ ל- $\left\{n^2 \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$.

ג) לא נכון. למשל $n^2:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ חח"ע ולא על.

ד) נכון. אם f אינה על, אז $image(f) < |B| = |A| = n\in\mathbb{N}$, לכן f אינה חח"ע, לפי עקרון שובך היונים.

2. הוכיחו: קבוצת המספרים הממשיים שאינם רציונאליים אינה בת מניה.

פיתרון:

אם $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ היתה בת מנייה. אז $|\mathbb{R}| = |\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}\setminus\mathbb{R}| = \aleph_0+\aleph_0 = \aleph_0$.

3. עיגול במישור $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ מוגדר להיות הקבוצה $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \;\middle|\; (x-a)^2+(y-b)^2\le r^2\right\}$ עבור נקודה $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ורדיוס $r\in\mathbb{R}^+$ (כאשר $\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}:x>0\}$).

הוכיחו: מספר העיגולים הזרים שאפשר לצייר במישור הוא בן מנייה.

פיתרון:

לכל עיגול יש נציג יחודי מ-$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ (כי הרציונליים קבוצה צפופה בממשיים והעיגולים זרים), לכן אפשר לשכן כל קבוצת עיגולים זרים ב-$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.

4. נתונה $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ הפיכה. נגדיר $A=\mathbb{N}\cup\{0\}$. הוכיחו שהקבוצה $A\times A\times A$ היא בת מנייה על-ידי הגדרת פונקציה חח"ע ועל לתוך $\mathbb{N}$.

פיתרון:

נשים לב ש-$t(n)=n+1$ פונקציה חח"ע ועל מ-A ל- $\mathbb{N}$ ו-$t^{-1}(n)=n-1$ ההופכית שלה.

נגדיר $g(a,b)=f(t(a),t(b))$, זו פונקציה חח"ע ועל מ-$A\times A$ ל- $\mathbb{N}$ (הרכבה של הפיכות).

ו-$h(a,b,c)=g\left(t^{-1}(g(a,b)),c\right)$ חח"ע ועל מ-$A\times A\times A$ ל- $\mathbb{N}$ (הרכבה של הפיכות).

5. נתבונן ב- $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, עבור $i, j \in \mathbb{N}$ נגדיר $A_{ij} = \left\{ f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f(i) = j \right\} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

א) הוכיחו: $\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{ij}\right) = \varnothing$.

פיתרון:

נביט בקבוצה $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{ij}$ עבור i קבוע.

לכל $j_1 \neq j_2$ הקבוצה $A_{ij_1} \cap A_{ij_2} = \varnothing$ כי אלה קבוצות של פונקציות עם ערך קבוע שונה ב- i .

כלומר, לכל $f \in A_{ij_1}$ ו- $g \in A_{ij_2}$, $f(i) = j_1 \neq j_2 = g(i)$.

הקבוצות זרות בזוגות ולכן גם החיתוך הכולל שלהם ריק $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{ij} = \varnothing$.

סה"כ: $\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{ij}\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(\varnothing) = \varnothing$.

ב) הוכיחו: $\bigcap_{j=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ij}\right) \neq \varnothing$.

פיתרון:

נראה שפונקציות הזהות $id(i) = i$ נמצאת בחיתוך $id \in \bigcap_{j=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ij}\right)$.

כדי להבין את מה שנמצא בחיתוך, נביט בקבוצה $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ij}$ עבור j קבוע.

זו קבוצת הפונקציות המקבלות את הערך j לפחות פעם אחת

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ij} = \left\{ f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \exists i \left(f(i) = j \right) \right\}$. לכל זוג $j_1 \neq j_2$ החיתוך $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ij_1} \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ij_2}$ הוא קבוצת הפונקציות המקבלות גם את j_1 וגם את j_2 לפחות פעם אחת.

החיתוך הכולל הוא הפונקציות המקבלות כל ערך ב- $\mathbb{N}$ לפחות פעם אחת.

וחזרה לפונקציית הזהות: $id \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ij}$ כי $id \in A_{jj}$ לכל j , ולכן נמצאת בחיתוך הכולל.

ג) הוכיחו שלכל קבוצה $H\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ בת מנייה, מתקיים: $\bigcap_{h\in H}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{ih(i)}\right)\neq\varnothing$.

פיתרון:

נניח בשלילה ש- $H\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ בת מנייה כך ש- $\bigcap_{h\in H}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{ih(i)}\right)=\varnothing$.

H בת מנייה, נסדר את איבריה: $H=\{h_1,h_2,\ldots\}$ ו- $\bigcap_{h\in H}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{ih(i)}\right)=\bigcap_{j=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{ih_j(i)}\right)$.

(נשים לב שבסעיף הקודם H היא קבוצת הפונקציות הקבועות $h_j(i)=j$).

נגדיר: $f(i)=h_i(i)$. נראה ש- f נמצאת בחיתוך בסתירה להנחה.

נשים לב ש- f מזדהה עם כל פונקציה $h_j\in H$ לפחות במקום אחד כי $f(j)=h_j(j)$.

בדומה לסעיף הקודם, עבור $h_j\in H$, האיחוד $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{ih_j(i)}$ הוא קבוצת הפונקציות המזדהות עם h_j לפחות במקום אחד $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{ih_j(i)}=\left\{g\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\mid\exists i\left(g(i)=h_j(i)\right)\right\}$ והחיתוך של קבוצות אלה הוא קבוצת הפונקציות המזדהות עם כל פונקציה ב- H לפחות במקום אחד (כמו f שהגדרנו).

לכל h_j , הפונקציה $f(i)=h_i(i)$ נמצאת באיחוד $\forall j\left(f\in A_{jh_j(j)}\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{ih_j(i)}\right)$.

ד) הסיקו שלא קיימת $H\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ בת מנייה כך ש- $\bigcap_{h\in H}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{ih(i)}\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}A_{ij}\right)$.

פיתרון:

לפי סעיף א' $\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}A_{ij}\right)=\varnothing$ ולפי סעיף ג', לכל קבוצה $H\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ בת מנייה

$\bigcap_{h\in H}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{ih(i)}\right)\neq\varnothing$.

ה) הוכיחו שכאשר $H=\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ מתקיים: $\bigcap_{h\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{ih(i)}\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}A_{ij}\right)$.

פיתרון:

ללא האילוץ ש- H בת מנייה, אסטרטגיית הבנייה של f מסעיף ג' לא נכונה. השאלה הבאה (6) מוכיחה זאת באופן כללי.

בסעיף זה אפשר לראות שצד ימין ריק, כי לכל פונקציה $f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ אפשר לבנות פונקציה זרה ממנה נקודתית $h\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, כלומר, $\forall i\left(h(i)\neq f(i)\right)$ ו- $f\notin\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{ih(i)}$.

6. <u>שאלת אתגר</u>

הוכיחו: אם A_{ij} קבוצות כלשהן, עבור $i, j \in \mathbb{N}$, אז: $\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{ij}\right) = \bigcap_{h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ih(i)}\right)$.

פיתרון:

נסמן $L = \bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{ij}\right) = \bigcap_{h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ih(i)}\right) = R$

$f \in L$

$\Downarrow$

$\exists i\left(\forall j\left(f \in A_{ij}\right)\right)$

$\Downarrow$ בפרט

$\forall h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\left(f \in A_{ih(i)}\right)$

$\Downarrow$

$f \in R$

$f \notin L$

$\Downarrow$

$\forall i\left(\exists j_i\left(f \notin A_{ij}\right)\right)$

define: $h(i) = j_i$

$\Downarrow$

$\forall i\left(f \notin A_{ih(i)}\right)$

$\Downarrow$

$\exists h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\left(f \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ih(i)}\right)$

$\Downarrow$

$f \notin R$

בהצלחה!