אנליזה מודרנית תרגול 9

1 בינואר 2015

רציפות בהחלט - תכונות

עבור $f \in AC$:

1. $f \in UC$ (רציפה במ"ש)
2. f' קיימת $a.e.$ ומתקיים: $f(x) = \int_a^x f'(t)\, d\mu + f(a)$

וכן, אם f מקיימת תנאי ליפשיץ אזי $f \in AC$.

המשך התרגיל מהשבוע שעבר:

תזכורת: F פונקציית קנטור, רוצים לחשב את הערך של:

$$I = \int_{[0,1]} x dF(x)$$

דרך שנייה לפתרון

תהי C קבוצת קנטור

$$I = \int_{[0,1]} x dF(x) = \int_C x dF(x)$$

(כיוון שעל $[0,1] \setminus C$ $F(x)$ קבועה ולכן $\int_{[0,1]\setminus C} x dF(x) = 0$). בשל ה$n$י הורדנו 2^n קטעים. נקרב ל$g(x) = x$ ע"י בניית פונקציה פשוטה φ_n. לפי הקצוות השמאליים של הקטעים שנותרים. כלומר איברים מהצורה (מעצם ההגדרה אלו בודאי שייכים לC)

$$\left(\dots, \underset{\overset{\uparrow}{n}}{x_n}, 0, 0, 0, \dots \right)$$

באשר $\{0,2\}$ $\forall i: x_i \in$ לפי פיתוח טרינארי, לכל $x \in C$ נתאים:

$$\begin{aligned}\varphi_n(x): &= (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \\ [x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}]\end{aligned}$$

אזי:

$$I = \int_C x dF(x) = \lim \int_C \varphi_n(x) dF(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3^k} \cdot 2^n}{2 \cdot 2^n} = \frac{1}{2}$$

מידות מכפלה

בהנתן שתי מידות μ, ν (σ סופיות ושלמות) על $(\Omega_1, S_1), (\Omega_2, S_2)$ בהתאמה אזי מידת המכפלה $\mu \times \nu$ על $\Omega_1 \times \Omega_2$ היא המידה היחידה עליו שנותנת את הטענה הבאה: לכל $A \in S_1$ ו-$B \in S_2$ (כש-S_1, S_2 הן σ אלגברות על Ω_1, Ω_2 בהתאמה).

$$\mu \times \nu (A \times B) = \mu(A) \nu(B)$$

תרגיל

$\Omega_1 = \Omega_2 = [0,1]$, $\nu = \mu = m$. הראו שכל קבוצה פתוחה ב-$[0,1]^2$ הינה מדידה והסקיו שקבוצות בורל הן מדידות.

פתרון

כל קבוצה פתוחה ב-$[0,1]^2$ ניתן להציג כאיחוד בן מנייה של מלבנים פתוחים (הוכחנו). נניח ש-$P \subset [0,1]^2$ פתוחה אזי $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ באשר I_n $(n \in \mathbb{N})$ מלבנים. כל מלבן מדיד ולכן P מדידה. ה-σ אלגברה של בורל היא ה-σ אלגברה הנוצרת ע"י הטופולוגיה, כלומר ה-σ אלגברה המינימלית שמכילה את כל הקבוצות הפתוחות ולכן כל קבוצת בורל היא מדידה כאיחודים וחיתוכים של קבוצות פתוחות.

משפט פוביני

בהנתן (Ω_1, S_1, μ), (Ω_2, S_2, ν) מרחבי מידות שלמות ו-$f: \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ מדידה ואינטגרבילית $\mu \times \nu$ אזי:

$$\iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y)\, d(\mu \times \nu) = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\, d\nu \right) d\mu =$$

$$= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\, d\mu \right) d\nu$$

תרגיל

נגדיר את הקבוצה הבאה:

$$A_n := \left\{ (x_1, x_2, \dots x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} |x_i| < 1 \right\} \subset (-1,1)^n$$

חשבו את $I_n := m^n (A_n)$ (כאשר m^n היא מידת הלבג הn מימדית).

פתרון

נרצה לחשב את:

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{A_n} dm^n$$

יהי $a \in (-1,1)$ אזי מתקיים:

$$\mathbb{1}_{A_n} (a, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{1}_{A_{n-1}} \left(\frac{x_2}{1-|a|}, \dots, \frac{x_n}{1-|a|} \right)$$

כי: $\sum_{i=2}^{n} |x_i| < 1 - |a|$

$$\iff \frac{\sum_{i=2}^{n} |x_i|}{1-|a|} < 1$$

כעת:

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{A_n} dm^n =$$

לפי פוביני ומשלמות הm ומכך ש $\mathbb{1}_{A_n}$ מדידה.

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A_n} (a) \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{1}_{A_{n-1}} \left(\frac{x_2}{1-|a|}, \dots, \frac{x_n}{1-|a|} \right) dm^{n-1} \right) dm \, (*)$$

טענה

$$\mathbb{1}_A \left(\frac{x}{a} \right) = \mathbb{1}_{aA} (x)$$

הוכחה

$$\mathbb{1}_A \left(\frac{x}{a} \right) = \begin{cases} 1 & \frac{x}{a} \in A \\ 0 & \text{else} \end{cases} = \begin{cases} 1 & x \in aA \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

לכן:

$$(*)\qquad \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A_1}(a)\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{1}_{(1-|a|)A_{n-1}}(x_2\dots x_n)\,dm^{n-1}\right)dm(a) \overset{\Downarrow}{=}$$

אולם:

$$\begin{aligned} m(aA) &= |a|\,m(A)\\ \Rightarrow \int \mathbb{1}_{aA}dm^n &= |a|^n\int \mathbb{1}_A dm^n \end{aligned}$$

ואם כן:

$$\begin{aligned} \overset{\Downarrow}{=}\int_{-1}^{1}\left((1-|a|)^{n-1} I_{n-1}\right)dm(a) &= -2\frac{(1-a)^n}{n}\Big|_0^1 I_{n-1}\\ &= \frac{2}{n}I_{n-1} = \frac{2}{n}\frac{2}{n-1}I_{n-2}\\ &= \dots = \frac{2^n}{n!} \end{aligned}$$

- על הבוחן:משפטים מההרצאה לא צריך להוכיח אבל לצטט נכונה ולהראות שהתנאים והשימוש מתקיים היטב. בנוגע למשפטים וטענות מהתרגול, כמובן שצריך להוכיח את הטענה