

אנליזה מודרנית תרגול 9

1 בינואר 2015

רציפות בהחלט - תכונות

עבור $f \in AC$:

1. $f \in UC$ (רציפה במ"ש)

2. f' קיימת *a.e.* ומתקיים: $f(x) = \int_a^x f'(t) d\mu + f(a)$

וכן, אם f מקיימת תנאי ליפשיץ אזי $f \in AC$.

המשך התרגיל מהשבוע שעבר:

תזכורת: F פונקציית קנטור, רוצים לחשב את הערך של:

$$I = \int_{[0,1]} x dF(x)$$

דרך שנייה לפתרון

תהי C קבוצת קנטור

$$I = \int_{[0,1]} x dF(x) = \int_C x dF(x)$$

(כיוון שעל $[0,1] \setminus C$ $F(x)$ קבועה ולכן $\int_{[0,1] \setminus C} x dF(x) = 0$). בשל הני הורדנו 2^n קטעים. נקרב ל- $g(x) = x$ ע"י בניית פונקציה פשוטה φ_n . לפי הקצוות השמאליים של הקטעים שנותרים. כלומר איברים מהצורה (מעצם ההגדרה אלו בודאי שייכים ל- C)

$$\left(\dots, \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{x_n}, 0, 0, 0, \dots \right)$$

באשר $\forall i : x_i \in \{0, 2\}$

לפי פיתוח טרינארי, לכל $x \in C$ נתאים:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &:= (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \\ [x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}] \end{aligned}$$

אזי:

$$I = \int_C x dF(x) = \lim \int_C \varphi_n(x) dF(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{2}{3^k} \cdot 2^n}{2 \cdot 2^n} = \frac{1}{2}$$

מידות מכפלה

בהנתן שתי מידות μ, ν (סופיות ושלמות) על $(\Omega_1, S_1), (\Omega_2, S_2)$ בהתאמה אזי מידת המכפלה $\mu \times \nu$ על $\Omega_1 \times \Omega_2$ היא המידה היחידה עליו שנותנת את הטענה הבאה: לכל $A \in S_1, B \in S_2$ (כש σ אלגברות על Ω_1, Ω_2 בהתאמה).

$$\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A) \nu(B)$$

תרגיל

$\nu = \mu = m, \Omega_1 = \Omega_2 = [0, 1]$ הראו שכל קבוצה פתוחה ב $[0, 1]^2$ הינה מדידה והסקיו שקבוצות בורל הן מדידות.

פתרון

כל קבוצה פתוחה ב $[0, 1]^2$ ניתן להציג כאיחוד בן מנייה של מלבנים פתוחים (הוכחנו). נניח ש $P \subset [0, 1]^2$ פתוחה אזי $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ באשר I_n מלבנים ($n \in \mathbb{N}$) כל מלבן מדיד ולכן P מדידה. ה σ אלגברה של בורל היא ה σ אלגברה הנוצרת ע"י הטופולוגיה, כלומר ה σ אלגברה המינימלית שמכילה את כל הקבוצות הפתוחות ולכן כל קבוצת בורל היא מדידה כאיחודים וחיתוכים של קבוצות פתוחות.

משפט פוביני

בהנתן $(\Omega_1, S_1, \mu), (\Omega_2, S_2, \nu)$ מרחבי מידות שלמות ו- $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ מדידה ואינטגרבילית $\mu \times \nu$ אזי:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) d(\mu \times \nu) &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y) d\nu \right) d\mu = \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu \right) d\nu \end{aligned}$$

תרגיל

נגדיר את הקבוצה הבאה:

$$A_n := \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n |x_i| < 1 \right\} \subset (-1, 1)^n$$

חשבו את $I_n := m^n(A_n)$ (כאשר m^n היא מידת הלבג ה- n מימדית).

פתרון

נרצה לחשב את:

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{A_n} dm^n$$

יהי $a \in (-1, 1)$ אזי מתקיים:

$$\mathbb{1}_{A_n}(a, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{1}_{A_{n-1}}\left(\frac{x_2}{1-|a|}, \dots, \frac{x_n}{1-|a|}\right)$$

$$\text{כי: } \sum_{i=2}^n |x_i| < 1 - |a|$$

$$\iff \frac{\sum_{i=2}^n |x_i|}{1-|a|} < 1$$

כעת:

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{A_n} dm^n =$$

לפי פוביני ומשלמות m ומכך ש $\mathbb{1}_{A_n}$ מדידה.

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A_n}(a) \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{1}_{A_{n-1}}\left(\frac{x_2}{1-|a|}, \dots, \frac{x_n}{1-|a|}\right) dm^{n-1} \right) dm (*)$$

טענה

$$\mathbb{1}_A\left(\frac{x}{a}\right) = \mathbb{1}_{aA}(x)$$

הוכחה

$$\mathbb{1}_A\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 1 & \frac{x}{a} \in A \\ 0 & \text{else} \end{cases} = \begin{cases} 1 & x \in aA \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

לכן:

$$(*) \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A_1}(a) \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{1}_{(1-|a|)A_{n-1}}(x_2 \dots x_n) dm^{n-1} \right) dm(a) \stackrel{**}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{aA} dm^n$$

אולם:

$$\begin{aligned} m(aA) &= |a| m(A) \\ \Rightarrow \int \mathbb{1}_{aA} dm^n &= |a|^n \int \mathbb{1}_A dm^n \end{aligned}$$

ואם כן:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left((1-|a|)^{n-1} I_{n-1} \right) dm(a) &= -2 \frac{(1-a)^n}{n} \Big|_0^1 I_{n-1} \\ &= \frac{2}{n} I_{n-1} = \frac{2}{n} \frac{2}{n-1} I_{n-2} \\ &= \dots = \frac{2^n}{n!} \end{aligned}$$

- על הבוחן: משפטים מההרצאה לא צריך להוכיח אבל לצטט נכונה ולהראות שהתנאים והשימוש מתקיים היטב. בנוגע למשפטים וטענות מהתרגול, כמובן שצריך להוכיח את הטענה