תרגילים בשרשראות מרקוב. + תרגילים מבחינות עבר

אם לא דברנו בסוף מספיק על שרשראות עם מספר מצבים אינסופי – פשוט תתעלמו מהתרגילים המתאימים.

1. תהי Xn שרשרת מרקוב סופית עם מטריצת מעבר דו-סטוכסטית (סכום של כל עמודה וגם של כל שורה הוא 1). הראו שההתפלגות האחידה היא סטציונרית עבור השרשרת.

2. בכד יש *N* כדורים בכל רגע. בכל שלב לוקחים כדור באקראי מהכד ואז זורקים מטבע – *p* עבור *0<p<1* נתון מראש(קבוע לכל השלבים) .אם יוצא עץ מכניסים לכד כדור לבן במקום הכדור שנלקח, ואם יוצא פלי מכניסים במקומו כדור שחור. יהי *{Xn}* מספר הכדורים הלבנים שבכד לאחר השלב ה *n*.
   א. האם *Xn* שרשרת מרקוב?
   ב. מה מחלקות הקשירות שלה, איזה מצבים הם נשנים ואיזה חולפים. האם יש מחזור גדול מ 1 לאחד המצבים?
   ג. מה הסתברויות המעבר?
   ד. חשבו את ההתפלגות הסטציונרית עבור *N=2*.
   ה. נחשו את ההתפלגות הסטציונרית עבור *N* כללי והוכיחו שהיא אכן סטציונרית.
   ו. אם נקח *p=1*, מה תוחלת הזמן עד שכל הכדורים בכד יהיו לבנים, אם בתחילה היו רק כדורים שחורים בכד.

3. . (א) הראו שלגבי כל מצב בשרשרת מרקוב בלתי פריקה בעלת מספר סופי של מצבים שהסכוי לא להגיע אליו עד שלב m שואף לאפס מעריכית, זאת אומרת שקיים מתקיים פרמטר $0 \le a < 1$ שהסתברות זאת קטנה מ a^m לכל $m > M$, M סופי וקבוע.
   (ב) הראו שבסעיף א' לא ניתן לוותר על סופיות מספר המצבים.

4. נתונה שרשרת מרקוב

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.15 & 0.25 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(א) מצאו את ההסתברויות הגבוליות $\lim_{n\to\infty} P_{3,4}^{(n)}$, $\lim_{n\to\infty} P_{3,6}^{(n)}$.

(ב) מצאו את תוחלת הזמן עד הקלטות במצבים נשנים כאשר נמצאים במצבים 3 ו 4 .

5 א. מהמר משחק במשחק הבא: זורקים מטבע הוגן עד שהוא נופל 3 פעמים רצוף על עץ. כשזה קורה, המהמר מרוויח 12 ₪. כל הטלת מטבע (כולל ההטלה בה הוא זוכה) עולה

למהמר 1 שח. האם המשחק מאוזן? מה תוחלת הרווח או הפסד של המהמר? (השתמשו בשרשראות מרקוב)

ב. כעת ניתנת למהמר גם אפשרות להפסיק באיזה שלב שירצה. האם הוא יכול להגדיל את תוחלת הרווח?

.6 . נתונים שני כדים שבכל אחד מהם יש N כדורים. מתוך 2N הכדורים N כדורים הם לבנים ו N כדורים הם שחורים. בכל שלב מוגרל אקראית כדור מכל כד ומעבר לכד האחר. הסתכלו על שרשרת מרקוב שמצביה הם מספר הכדורים הלבנים בכד הראשון.

(א) רשמו את מטריצת המעבר של השרשרת.

(ב) מיינו את מצבי השרשרת.

(ג) עבור $N=3$, חשבו את וקטור ההסתברויות הסטציונרי.

7 א. אם $\{X_n\},\{Y_n\}$ שרשראות מרקוב בלתי תלויות עם ערכים שלמים, האם בהכרח גם $\{X_n+Y_n\}$ שרשרת מרקוב?

ב. האם בכל שרשרת מרקוב אי פריקה בעלת מחזור d, יש לכל שני מצבים בשרשרת סיכוי חיובי לעבור מאחד לשני תוך כפולה שלמה של d?

ג. האם בשרשרת מרקוב בעלת שלושה מצבים יש לכל היותר 3 התפלגויות סטציונריות שונות?

8 נתונה שרשרת מרקוב על המצבים S={1,2,3,4,5,6 } עם מטריצת המעבר

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

א. מיינו את המצבים של השרשרת

ב. חשבו את $\lim_{n\to\infty} P^{(n)}(\mathrm{i},\mathrm{i})$ עבור i=1,..,6

ג. מצאו שתי התפלגויות סטציונריות שונות.

ד. חשבו את תוחלת הזמן עד ששרשרת שמתחילה במצב 1 נבלעת בקבוצת המצבים הנשנים.

.9 א. האם קיימת שרשרת מרקוב עם מספר אינסופי של מצבים חולפים, מספר אינסופי של מצבים נשנים-0 ומספר אינסופי של מצבים נשנים-חיובית ? (תנו דוגמה שיש או הוכחה שאין) (7)

ב. האם קיימת שרשרת מרקוב עם אינסוף מצבים חולפים, 4 נשנים ו 4 נשנים חיובית? (7)

ג. יהיו i,j מצבים בשרשרת מרקוב הומוגנית, ונניח שיש הסתברות חיובית לעבור מ i ל j תוך מספר סופי של צעדים. האם בהכרח יש סיכוי חיובי , כשמתחילים ב i, לעבור ב j לפחות 3 פעמים? (6)

ד. יהיו i,j מצבים בשרשרת מרקוב הומוגנית, ונניח שיש הסתברות חיובית, כשמתחילים מ i, לעבור ב j לפחות 3 פעמים. האם בהכרח יש סיכוי חיובי, כשמתחילים מ i, לעבור ב j לפחות 5 פעמים? (7)

10. תהי $\{X_n\}$ שרשרת מרקוב הומוגנית על המצבים S={1,2,3,4,5,6} עם מטריצת מעבר נתונה ע"י

$$P=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} a & 3 & 0 & 2-a & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

. נגדיר תהליך חדש

$$Y_n=\begin{cases} 1 & X_n=1 \; or \; X_n=2 \\ 2 & X_n=3 \; or \; X_n=4 \\ 3 & X_n=5 \; or \; X_n=6 \end{cases}.$$

א. האם התהליך Y_n שרשרת מרקוב עבור a=1 ? נמק. (7)

ב. האם התהליך Y_n שרשרת מרקוב עבור a=2 ? נמק.(7)

ג. עבור הערכים (או ערך) של a מהסעיפים הקודמים בו יוצא כי Y_n שרשרת מרקוב, כתבו את מטריצת המעבר של Y_n ומצאו את ההתפלגות הסטציונרית של Y_n. (13)

11. תהליך אקסקלוזן חד כווני: נתון מעגל עם 3 מקומות. כל מקום יכול להיות ריק או תפוס על ידי חלקיק. המערכת מתפתחת בהתאם לכלל הבא: בכל שלב בוחרים באקראי (באופן אחיד) את אחד החלקיקים, ואם המקום מימינו פנוי הוא זז מקום אחד ימינה, אחרת הוא פשוט נשאר במקום.

א. תארו את את התהליך כשרשרת מרקוב. מהו מרחב המצבים של השרשרת? מהי מטריצת המעבר?

ב. מהן מחלקות הקשירות של השרשרת?

ג. מהן ההתפלגויות הסטציונריות של השרשרת (רמז – תארו את ההתפלגות הסטציונרית של כל מחלקה)

ד. עבור אילו מצבים התחלתיים יש התכנסות להתפלגות הסטציונרית?

מבחן – הסתברות ותהליכים סטוכסטיים 88-962

מועד ב , סמסטר א' תשע"ו

חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט (כלומר ללא חיבור אינטרנט, מקלדת או טלפון). בכל מקרה די לתת תשובות מספריות בדיוק של עד שתי ספרות אחרי הנקודה (או כשבר פשוט). יש לנמק (בקצרה) את התשובות.

יש לבחור 4 שאלות מתוך 5. (לא ניתן לענות על סעיפים בכל 5 השאלות) כל שאלה שווה 27- נקודות, אך הציון המקסימלי הוא 100.

זמן הבחינה: שלוש שעות

1. א. האם קיימת שרשרת מרקוב עם אינסוף מצבים חולפים, 5 נשנים אפס ו 5 נשנים חיובית? (9)

ב. אם X_n שרשרת מרקוב עם ערכים שלמים חיוביים האם בהכרח גם X_n^2 שרשרת מרקוב. (9)

ג. יהיו i,j מצבים בשרשרת מרקוב הומוגנית, ונניח שיש הסתברות חיובית, כשמתחילים מ i, לעבור ב j לפחות 2 פעמים. האם בהכרח יש סיכוי חיובי, כשמתחילים מ i, לעבור ב j לפחות 4 פעמים? (9)

2. נתונה שרשרת מרקוב $\{X_t\}$ בזמן רציף על המצבים S={1,2,3,4} עם יוצר אינפיטיסימלי

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

א. מהן מחלקות הקשירות של השרשרת. מיינו את המצבים לנשנים וחולפים. (7)

ב. מהי מטריצת המעבר של השרשרת הטמונה? (5)

ג. מצאו התפלגות סטציונרית של השרשרת הרציפה (6). האם היא יחידה?(3)

ד. מה הסיכוי, כשמתחילים ממצב 2 להגיע למצב 4 לפני שמגיעים למצב 1.? (6)

3. יהיו X_i משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות , ויהי $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$.

א. נניח ש X_i אי-שליליים ובעלי תוחלת סופית, ו- T זמן עצירה עם תוחלת סופית. הראו ש

$\mathrm{E}[X_T] = E[T]E[X_1]$ (14)

ב. נניח שX_i חסומים וש- $\mathrm{E}[X_1] = 0$. יהי $a > 0$ כלשהוא, ונגדיר $T_a = \inf\{n \geq 0: S_n \geq a\}$. הראו ש - $\mathrm{E}[T_a] = \infty$.(13)

4. פוליה החליט לשנות מעט את תהליך הכד שלו. כעת בכל שלב, במקום להוציא כדור מקרי מהכד ולהחזיר 2 מאותו צבע במקום, הוא מחזיר 3 כדורים מאותו צבע (כלומר בכל שלב מתווספים לכד שני כדורים חדשים). נניח כעת שמתחילים עם כד בו 2 כדורים אדומים ואחד כחול.

א. יהא X_n אחוז הכדורים האדומים בכד לאחר n שלבים. הראו שקיים משתנה מקרי X כך ש $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ בהסתברות 1. (12)
ב. אני ופוליה כעת משחקים במשחק הבא: אני רשאי לעצור את התהליך שלו מתי שארצה, ואז אני מנצח אם הכדור הבא שנשלף מהכד הוא אדום. אם הכדור שנשלף הוא כחול אני מפסיד. אם עברנו 10 שלבים בלי לעצור(כלומר כשיש בכד 23 כדורים) , חייבים לעצור ולשלוף כדור וצבעו קובע. בהנחה שאני משחק אופטימלית, מה הסיכוי שלי לנצח? האם האסטרטגיה משנה? (15)

5. נתונה אוכלוסיה של 5 פריטים , כל אחד מהם מסוג A או B.
בכל דור מתחלפת כל האוכלוסיה ע"יי שדוגמים עם חזרה 5 פריטים מהדור הקודם
(כלומר כל פריט אוכלוסיה בדור הבא נבחר להיות מסוג A או B בסיכוי פרופורציונלי לחלק היחסי של A ו B בדור הקודם)
ניתן לתאר את האוכלוסיה כשרשרת מרקוב.
א. תנו תאור של התפתחות האוכלוסיה כשרשרת מרקוב. (שימו לב כי ניתן למשל לתאר זאת כשרשרת עם 6 מצבים (מומלץ) או עם 32 מצבים באופן טבעי) (6)
ב. מהן הסתברויות המעבר? (7)
ג. תארו את מחלקות הקשירות של השרשרת. מיינו למצבים הם נשנים\חולפים? (5)
ד. מה הסיכוי שהחל מדור כלשהוא כל הפריטים יהיו מסוג B אם ידוע שבדור הראשון היו 3 פריטים מסוג A ושניים מסוג B ? (9)

בהצלחה!

מבחן – הסתברות ותהליכים סטוכסטיים 88-962

מועד א , סמסטר א' תשע"ד

חומר עזר אסור פרט לדף נוסחאות מצורף ומחשבון פשוט (כלומר ללא חיבור אינטרנט, מקלדת או טלפון). בכל מקרה די לתת תשובות מספריות בדיוק של עד שלוש ספרות אחרי הנקודה. יש לנמק (בקצרה) את התשובות.

<u>יש לבחור 4 שאלות מתוך 5. (לא ניתן לענות על סעיפים בכל 5 השאלות) כל שאלה שווה 28- נקודות, אך הציון המקסימלי הוא 100.</u>

<u>זמן הבחינה: שלוש שעות</u>

12. א. האם קיימת שרשרת מרקוב עם מספר אינסופי של מצבים חולפים, מספר אינסופי של מצבים נשנים-0 ומספר אינסופי של מצבים נשנים-חיובית ? (תנו דוגמה שיש או הוכחה שאין) (7)
ב. האם קיימת שרשרת מרקוב עם אינסוף מצבים חולפים, 4 נשנים ו 4 נשנים חיובית? (7)
ג. יהיו i,j מצבים בשרשרת מרקוב הומוגנית, ונניח שיש הסתברות חיובית לעבור מ i ל j תוך מספר סופי של צעדים. האם בהכרח יש סיכוי חיובי , כשמתחילים ב i, לעבור ב j לפחות 3 פעמים? (7)
ד. יהיו i,j מצבים בשרשרת מרקוב הומוגנית, ונניח שיש הסתברות חיובית, כשמתחילים מ i, לעבור ב j לפחות 3 פעמים. האם בהכרח יש סיכוי חיובי, כשמתחילים מ i, לעבור ב j לפחות 5 פעמים? (7)

13. תהי $\{X_n\}$ שרשרת מרקוב הומוגנית על המצבים S={1,2,3,4,5,6} עם מטריצת מעבר נתונה ע"י

$$P=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} a & 3 & 0 & 2-a & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

. נגדיר תהליך חדש

$$Y_n=\begin{cases} 1 & X_n=1 \ or\ X_n=2 \\ 2 & X_n=3 \ or\ X_n=4 \\ 3 & X_n=5 \ or\ X_n=6 \end{cases}.$$

ד. האם התהליך Y_n שרשרת מרקוב עבור a=1 ? נמק. (8)
ה. האם התהליך Y_n שרשרת מרקוב עבור a=2 ? נמק.(8)
ו. עבור הערכים (או ערך) של a מהסעיפים הקודמים בו יוצא כי Y_n שרשרת מרקוב, כתבו את מטריצת המעבר של Y_n ומצאו את ההתפלגות הסטציונרית של Y_n. (12)

14. א. יהיו X,Y,Z שלושה משתנים מקריים שכל אחד מתפלג אחיד על {1,2,3,4,5,6} (קוביות). האם קיים צימוד של שלושת הקוביות כך ש P(X>Y) > 1/2, P(Y>Z)>1/2 ו - P(Z>X)>1/2 ? (8)

ב. יהיה {Xn} הילוך מקרי מוטה על השלמים, שמתחיל מ 0, ובכל צעד הולך ימינה בסיכוי 3/4 ושמאלה בסיכוי 1/4 , ועוצר כשהוא מגיע ל 10±. הראו שהסיכוי שההילוך יגיע ל 10 (ולא יעצר במקום ב 10-) הוא לא פחות מ 0.5 . (20)

15. מטילים שוב ושוב מטבע מוטה הנוחת על עץ בסיכוי 0.75 ועל פלי בסיכוי 0.25 . תהי {Xn} שרשרת מרקוב הסופרת את האורך של הרצף הנוכחי של מספר הנפילות על עץ, חסום ע"יי 10. (כלומר בכל פעם שיוצא פלי השרשרת עוברת למצב 0,ו אם הרצף הנוכחי של עצים ארוך מ10-, השרשרת נשארת במצב 10 עד שיוצא פלי)

א. כתבו את הסתברויות המעבר של השרשרת. (5)

ב. מצאו התפלגות סטציונרית לשרשרת. רמז – כדאי להתחיל מלמצוא את המידה הסטציונרית של המצב 0. (9)

בהצלחה!

<u>מבחן – הסתברות ותהליכים סטוכסטיים 88-962</u>

<u>מועד א , סמסטר א' תשע"ו</u>

חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט (כלומר ללא חיבור אינטרנט, מקלדת או טלפון). בכל מקרה די לתת תשובות מספריות בדיוק של עד שתי ספרות אחרי הנקודה (או כשבר פשוט). יש לנמק (בקצרה) את התשובות.

<u>יש לבחור 4 שאלות מתוך 5. (לא ניתן לענות על סעיפים בכל 5 השאלות) כל שאלה שווה 27-נקודות, אך הציון המקסימלי הוא 100.</u>

<u>זמן הבחינה: שלוש שעות</u>

1. א. האם קיימת שרשרת מרקוב עם מספר אינסופי של מצבים חולפים, וחמישה מצבים נשנים ? (תנו דוגמה שיש או הוכחה שאין) (9)

ב. אם X_n שרשרת מרקוב עם ערכים ממשיים אז בהכרח גם X_n^2 שרשרת מרקוב. (9)

ג. האם בכל שרשרת מרקוב אי פריקה בעלת מחזור d, יש מכל מצב שרשרת סיכוי חיובי לחזור לעצמו תוך בדיוק d צעדים? (9)

2. תהליך גלטון-ווטסון עם התפלגות צאצאים L הוא שרשרת מרקוב על הטבעיים בו X_n מתאר את מספר הפריטים באוכלוסיה ו X_{n+1} נתון על ידי $X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Y_{n,i}$ כאשר $Y_{n,i}$ משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות שכל אחד מהם מתפלג לפי L.
(ניתן לחשוב על כך כאילו כל פריט באוכלוסיה מוחלף במספר מקרי של צאצאים שמתפלג לפי L). אם בשלב כלשהו $X_n = 0$ אז גם $X_{n+1} = 0$ ולכן 0 מצב בולע. במקרה כזה נגיד שהתהליך מת.

נניח שהתפלגות הצאצאים L מקיימת $\mathrm{P}(L=0) = P(L=2) =$ 0.5, ו $X_0 = 1$.
(הערה – כל סעיפי השאלה עובדים באותה קלות לכל התפלגות L עם תוחלת 1 וסיכוי חיובי ל L=0)

א. הראו ש X_n הוא מרטינגל (9)
ב. האם X_n מתכנס בהסתברות 1? (9)
ג. מה הסיכוי שהתהליך לא ימות לעולם? (5)
ד. האם X_nמתכנס ב L_1 ? (4)

3. מטילים מטבע הוגן שוב ושוב וחוזר חלילה. תהי X_nשרשרת מרקוב שסופרת את מספר ההטלות שיצאו עץ ברצף מאז הופעת הטלת הפלי האחרונה, כשרצף מעל 4 נחשב תמיד כ 5. (כלומר עם הרצף עומד על 5 ומעלה ויוצא שוב עץ, נשארים במצב 5),השרשרת מתחילה ממצב $X_0 = 0$.

ד. כתבו את הסתברויות המעבר של השרשרת. (במטריצה, בנוסחה או בציור) (5)
ה. מצאו התפלגות סטציונרית לשרשרת. רמז – כדאי להתחיל מלמצוא את המידה הסטציונרית של המצב 0. (8)
ו. מה תוחלת הזמן, כשמתחילים מ 1 ,עד שחוזרים למצב 1? (יש הרבה דרכים לחשב זאת.) (5)
ז. יהי $M_n = 2^{X_n} - \frac{n}{2}$ ויהי $Y_n = M_{n\wedge\tau}$ ה"מרטינגל העצור" כאשר τ זמן העצירה בו השרשרת פוגעת במצב 5. הראו ש Y_n הוא מרטינגל. (9)

4. יהיה $\{X_n\}_{n\geq 0}$ הלוך מקרי מוטה עצלן על השלמים שמתחיל מ $X_0 = 1$ והולך בכל צעד שמאלה בסיכוי $\frac{1}{4}$, נשאר במקום בסיכוי $\frac{1}{4}$ והולך ימינה בסיכוי $\frac{1}{2}$. כלומר $\{X_n\}_{n\geq 0}$ שרשרת מרקוב עם הסתברויות מעבר

$P(X_{n+1}=X_n)=\frac{1}{4}, \mathrm{P}(X_{n+1}=X_n-1)=\frac{1}{4}, \mathrm{P}(X_{n+1}=X_n+1)=\frac{1}{2}$

א. הוכיחו ש - $R_n=2^{-X_n}$ ו $M_n=X_n-\frac{n}{4}$ הם מרטינגלים. (12)

ב. מצאו את ההסתברות שההלוך יגיע ל N לפני שיגיע ל 0. (9)

ג. מצאו את ההסתברות שההלוך לעולם לא יגיע ל 0. (רמז – ניתן להגדיר מאורעות יורדים ולהשתמש ברציפות ההסתברות, אם כי יש עוד דרכים) (6)

בהצלחה!

<u>מבחן – הסתברות ותהליכים סטוכסטיים 88-962</u>

<u>מועד ב , סמסטר א' תשע"ד</u>

חומר עזר אסור פרט לדף נוסחאות מצורף ומחשבון פשוט (כלומר ללא חיבור אינטרנט, מקלדת או טלפון). בכל מקרה די לתת תשובות מספריות בדיוק של עד שלוש ספרות אחרי הנקודה. יש לנמק (בקצרה) את התשובות.

<u>יש לבחור 4 שאלות מתוך 5. (לא ניתן לענות על סעיפים בכל 5 השאלות) כל שאלה שווה 27- נקודות, אך הציון המקסימלי הוא 100.</u>

<u>זמן הבחינה: שלוש שעות</u>

16. א. אם $\{X_n\},\{Y_n\}$ שרשראות מרקוב בלתי תלויות עם ערכים שלמים, האם בהכרח גם $\{X_n+Y_n\}$ שרשרת מרקוב? (9)
ב. האם בכל שרשרת מרקוב אי פריקה בעלת מחזור d, יש לכל שני מצבים בשרשרת סיכוי חיובי לעבור מאחד לשני תוך כפולה שלמה של d? (9)
ג. האם בשרשרת מרקוב בעלת שלושה מצבים יש לכל היותר 3 התפלגויות סטציונריות שונות? (9)

17. נתונה שרשרת מרקוב על המצבים { S={1,2,3,4,5,6 עם מטריצת המעבר

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

18. מיינו את המצבים של השרשרת (6)
19. חשבו את $\lim_{n\to\infty} P^{(n)}(\mathrm{i},\mathrm{i})$ עבור i=1,..,6 (7)
20. מצאו שתי התפלגויות סטציונריות שונות. (7)
21. חשבו את תוחלת הזמן עד ששרשרת שמתחילה במצב 1 נבלעת בקבוצת המצבים הנשנים. (7)

22. יהיו $\{X_n\}$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות שכל אחד מהם מתפלג אחיד על הקטע [0,1].

א. יהיה B_n המאורע $B_n = \{X_{n+1} < \frac{X_n}{n}\}$. מה ההסתברות שקורים אינסוף מהמאורעות B_n ? (9)

ב. יהיה Cn המאורע $C_n = \{X_n < \frac{1}{e^n}\}$. מה הסיכוי שקורים אינסוף מהמאורעות C_n ? (9)

ג. יהיו D_n המאורעות $D_n = \{ (\sum_{k=1}^{n} X_k) - \frac{n}{2} > \frac{n}{4}\}$. מה הסיכוי שיקרו אינסוף מהמאורעות D_n ? (רמז- אחת הדרכים היא בעזרת חוקי המספרים הגדולים או חוק הגבול המרכזי). (9)

בהצלחה!

מבחן – הסתברות ותהליכים סטוכסטיים 88-962

מועד ב , סמסטר א' תשע"ו

6. **א**. האם קיימת שרשרת מרקוב עם אינסוף מצבים חולפים, 5 נשנים אפס ו 5 נשנים חיובית? (9)

ב. אם X_n שרשרת מרקוב עם ערכים שלמים חיוביים האם בהכרח גם X_n^2 שרשרת מרקוב. (9)

ג. יהיו i,j מצבים בשרשרת מרקוב הומוגנית, ונניח שיש הסתברות חיובית, כשמתחילים מ i, לעבור ב j לפחות 2 פעמים. האם בהכרח יש סיכוי חיובי, כשמתחילים מ i, לעבור ב j לפחות 4 פעמים? (9)

7. תהי $\{X_n\}$ שרשרת מרקוב הומוגנית על המצבים S={1,2,3,4,5,6} עם מטריצת מעבר נתונה ע"י

$$P=\begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

א. מיינו את המצבים של השרשרת (רכיבי קשירות, מצבים נשנים וחולפים) (7)

ב. מצאו שתי התפלגויות סטציונריות שונות של השרשרת. (8)

ג. עבור i=1,2,3 האם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} P_{i,i}^{n}$. חשבו את הגבול כאשר הוא קיים. (8)

ד. מה הסיכוי, כשמתחילים ממצב 1, לפגוע במצב 2 לפני שפוגעים במצב 3? (4)

8. יהיו X_i משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות , ויהי S_n=$\sum_{i=1}^{n} X_i$.

ג. נניח ש X_i אי-שליליים ובעלי תוחלת סופית, ו- T זמן עצירה עם תוחלת סופית. הראו ש
$\mathrm{E}[X_T] = E[T]E[X_1]$ (14)

ד. נניח שX_i חסומים וש- $\mathrm{E}[X_1] = 0$. יהי $a > 0$ כלשהוא, ונגדיר $T_a = \inf\{n \geq 0: S_n \geq a\}$. הראו ש - $\mathrm{E}[T_a] = \infty$.(13)
(בסעיף ב איננו מניחים שהמשתנים אי-שליליים)

9. פוליה החליט לשנות מעט את תהליך הכד שלו. כעת בכל שלב, במקום להוציא כדור מקרי מהכד ולהחזיר 2 מאותו צבע במקום, הוא מחזיר 3 כדורים מאותו צבע (כלומר בכל שלב מתווספים לכד שני כדורים חדשים). נניח כעת שמתחילים עם כד בו 2 כדורים אדומים ואחד כחול.

ג. יהא X_n אחוז הכדורים האדומים בכד לאחר n שלבים. הראו שקיים משתנה מקרי X כך ש $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ בהסתברות 1. (12)

ד. אני ופוליה כעת משחקים במשחק הבא: אני רשאי לעצור את התהליך שלו מתי שארצה, ואז אני מנצח אם הכדור הבא שנשלף מהכד הוא אדום. אם הכדור שנשלף הוא כחול אני מפסיד. אם עברנו 10 שלבים בלי לעצור(כלומר כשיש בכד 23 כדורים) , חייבים לעצור ולשלוף כדור וצבעו קובע. בהנחה שאני משחק אופטימלית, מה הסיכוי שלי לנצח? האם האסטרטגיה משנה? (15)

10. נתונה אוכלוסיה של 5 פריטים , כל אחד מהם מסוג A או B.
בכל דור מתחלפת כל האוכלוסיה ע"יי שדוגמים עם חזרה 5 פריטים מהדור הקודם
(כלומר כל פריט אוכלוסיה בדור הבא נבחר להיות מסוג A או B בסיכוי פרופורציונלי לחלק היחסי של A ו B בדור הקודם)
ניתן לתאר את האוכלוסיה כשרשרת מרקוב.

ה. תנו תאור של התפתחות האוכלוסיה כשרשרת מרקוב. (שימו לב כי ניתן למשל לתאר זאת כשרשרת עם 6 מצבים (מומלץ) או עם 32 מצבים באופן טבעי) (6)
ו. מהן הסתברויות המעבר? (7)
ז. תארו את מחלקות הקשירות של השרשרת. מיינו למצבים הם נשנים\חולפים? (5)
ח. מה הסיכוי שהחל מדור כלשהוא כל הפריטים יהיו מסוג B אם ידוע שבדור הראשון היו 3 פריטים מסוג A ושניים מסוג B ? (9)
(רמז – ניתן לפתור בשיטות של שרשראות מרקוב או יותר בפשטות בכלים אחרים)

בהצלחה!