תרגיל 1־אנליזה פונקציונלית.

23 באוקטובר 2018

תזכורת: עבור קבוצות A ו B:

- נאמר ש $|A|=|B|$ אם קיימת פונקציה חח"ע ועל $f:A\to B$.
- נאמר ש $|A|\leq|B|$ אם קיימת פונקציה חח"ע $f:A\to B$ או באופן שקול שקיימת פונקציה על $g:B\to A$.
- אם מתקיים $|B|\leq|A|$ ו $|A|\leq|B|$ אזי $|A|=|B|$.
- סכום עוצמות מוגדר על ידי $|A|+|B|=|A\times\{0\}\cup B\times\{1\}|$ (אם A ו B זרות אזי $|A|+|B|=|A\cup B|$).
- כפל עוצמות מוגדר על ידי $|A\times B|=|A|\,|B|$.
- חזקת עוצמות מוגדרת על ידי $|A|^{|B|}=|\{f|f:B\to A\}|$ (כעוצמה של כל הפונקציות מ B ל A).
- את העוצמה של טבעיים $|\mathbb{N}|$ נהוג לסמן על ידי $\aleph_0$.
- אם A סופית או $|A|=\aleph_0$ נאמר ש A היא בת מניה.
- חשבון עוצמות: אם A או B אינה קבוצה סופית אזי מתקיים

$$|A|+|B|=|A|\,|B|=\max\{|A|,|B|\}.$$

1. תהיינה A_1,A_2,B_1,B_2 כך ש $|A_1|=|A_2|$, $|B_1|=|B_2|$. הראו באופן מפורש, כלמר על ידי הוכחת קיום של פונקציה את השוויונות הבאים.

   (א) $|A_1|+|B_1|=|A_2|+|B_2|$.

   (ב) $|A_1|\,|B_1|=|A_2|\,|B_2|$.

   (ג) $|A_1|^{|B_1|}=|A_2|^{|B_2|}$.

2. תהי A קבוצה ותהי $P(A)$ קבוצת החזקה שלה, כאשר קבוצה חזקה היא קבוצת תתי הקבוצות של A. ($P(A)=\{X|X\subseteq A\}$).

   (א) לכל $B\subseteq A$ נגדיר פונקציה מאפיינת $\chi_B:A\to\{0,1\}$ על ידי

   $$\chi_B(x)=\begin{cases}1 & x\in B\\ 0 & x\notin B\end{cases}.$$

הראו שהפונקציה $F : P(A) \to \{f : A \to \{0,1\}\}$ המוגדרת על ידי

$$F(B) = \chi_B$$

הינה פונקציה חח"ע ועל.

(ב) הסיקו ש $|P(A)| = 2^A$.

3. הראו שכללי חזקה האריתמטיים הבאים תקפים גם לגבי העוצמות. (ניתן להניח ש A, B, C הן קבוצות זרות).

(א) $(|A|\,|B|)^{|C|} = |A|^{|C|} \times |B|^{|C|}$.

(ב) $|A|^{|B|+|C|} = |A|^{|B|}\,|A|^{|C|}$.

(ג) $\left(|A|^{|B|}\right)^{|C|} = |A|^{|B||C|}$.

4. הראו שקוצות הבאות הן בנות מניה:

(א) אוסף הקטעים הפתוחים $\{(a,b)\,|a,b \in \mathbb{Q}\}$ עם קצוות רציונליות.

(ב) אוסף המעגלים מהצורה ב $\mathbb{R}^2$ כך שמרכז המעגל יש קואורדינטות רציונליות ורדיוס רציונלי.

5. יהי $z \in \mathbb{C}$. נאמר ש z הוא מספר אלגברי אם קיים פולינום עם מקדמים שלמים $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ כך ש $p(x) = 0$. כך למשל i ו $\sqrt[5]{3}$ הם מספרים אלגבריים. הראו שקבוצת כל המספרים האלגבריים היא בן מניה. (הדרכה: לכל פולינום יש מספר סופי של פתרונות. כמו כן, מצאו את עוצמת הפולינומים עם מקדמים שלמים.)