אינפי 1 - פתרון לתרגיל 4

17 בנובמבר 2015

שאלה

מצאו את גבולה של הסדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 1 + \frac{2}{a_n} & n > 1 \end{cases}.$$

הערה

ההערה שכתבתי על העקביות נועדה לדרך פתרון שלא מוצגת כאן בה אנחנו בודקים מתי $a_{n+2} \le a_n$ ומקבלים את התחומים עבורם אי השיוויון מתקיים. מאחר שזו דרך מסובכת יותר ופחות מובנת אינני מעלה אותה לכאן.

הוכחה

נציב ערכים נומריים לקבל תחושה בנוגע לסדרה שלנו:

$$a_1 = 1, a_2 = 1 + \frac{2}{1} = 3, a_3 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}, \ldots$$

ואמנם זו איננה סדרה מונוטונית אז צריך לעבוד קצת. נתבונן כעת בקפיצות של 2, האם הסדרה מונוטונית:

$$a_{n+2} = 1 + \frac{2}{a_{n+1}} = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{a_n}} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 2}$$

רוצים לבדוק מתי <u>זו</u> סדרה מונוטונית (אם בכלל). בהוכחה שלי אראה לה"כ עבור מונטוניות יורדת אבל ע"י היפוך אי השיוויונות ניתן לקבל גם תנאי מתי זו סדרה מונוטונית עולה.

$$a_{n+2} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 2} \le a_n \iff a_n^2 - a_n - 2 \ge 0 \iff a_n \ge 2 \vee a_n \le -1$$

המקרה השני נפסל מאחר שהסדרה שלנו חיובית (אינודקציה לא קשה) ומכאן נקבל שאם $a_n \ge 2$ אז הסדרה הנ"ל (איברים של a_n בקפיצות 2) היא מונטונית יורדת. זה לא אומר לצורך העניין שגם $a_{n+2} \ge 2$.[1]

---

[1] לצורך העניין קחו את הסדרה $b_n = \begin{cases} 3 & n = 2k+1 \\ 1 & n = 2k \end{cases}$. תשימו לב שאם $b_n \ge 2$ אז אכן $b_{n+1} = 1 < b_n = 3$ אבל $b_{n+1} = 1 \ngeq 3$ ובפרט גם לא מתקיים ש$1 < 3$.

מכאן אנחנו רוצים לבדוק עקביות, כלומר להוכיח את הטענה $a_n \geq 2 \Rightarrow a_{n+2} \geq 2$, אבל זה נובע מאי"ש ישיר [2]:

$$a_{n+2} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 2} = 1 + \frac{2a_n}{a_n + 2} \geq 1 + \frac{2a_n}{a_n + a_n} = 2$$

מכאן שהראנו עקביות ומונוטוניות. אם תהפכו את כל האי"ש כאן בדיוק תקבלו את המצב בו זו סדרה מונטונית עולה. אם נסכם:

1. האיברים בקפיצות שתיים במקומות הזוגיים הם סדרה מונוטונית יורדת.
2. האיברים בקפיצות 2 במקומות אי זוגיים הם סדרה מונטונית עולה.

חסימות (נובעת מעקביות):

- סדרה 1 חסומה מלרע ע"י 2 ולכן מתכנסת.
- סדרה 2 חסומה מלעיל ע"י 2 ולכן מתכנסת.

מכאן קיבלנו שתת הסדרה $\{a_{2k}\}$ מתכנסת וגם $\{a_{2k+1}\}$ מתכנסת. זה אומר שa_n תתכנס אמ"מ לשתי סדרות אלו יהיה גבול משותף (מדוע התכנסות של שתי תתי סדרות אלו גוררת התכנסות הסדרה? הראו לפי הגדרת הגבול). אמנם:

$$\begin{aligned}
\lim a_{n+2} &= \lim a_n \\
\lim \frac{3a_n + 2}{a_n + 2} &= \lim a_n \\
\frac{3L + 2}{L + 2} &= L \iff \boxed{L = 2}
\end{aligned}$$

(האפשרות השנייה נפסלת מאחר שקל לראות שהסדרה שלנו חיובית). נסכם: לסדרה המקורית יש גבול והוא 2.

[2] חלקכם עשה אינדוקציה שזה עובד אבל במבחן אני מציע שתעדיפו את הפתרון הנכון והקצר על רעהו הנכון והארוך.