

# תרגול 10 – 88-112 אלגברה לינארית 1

## סמסטר א' תשע"ו

דצמבר 2015

### 1 וקטורי קואורדינטות

**הגדרה 1.1.** יהי  $V$  מרחב וקטורי, יהי  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  בסיס סדור של  $V$  (כלומר, אכפת לנו מהסדר שלו), ויהי  $v \in V$ . אזי קיימת דרך אחת ויחידה לכתוב

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

עבור  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ . נגדיר את **וקטור הקואורדינטות** של  $v$  ביחס ל- $B$  להיות

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

**דוגמה 1.2.** יהי  $v = 3 + 5x - x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$  ויהי  $B = \{1, x, x^2\}$  הבסיס הסטנדרטי של  $\mathbb{R}_2[x]$ . וקטור הקואורדינטות שלו הוא

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**דוגמה 1.3.** תהי  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , ויהי  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$  הבסיס הסטנדרטי של  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ . אזי

$$[A]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

אם ניקח את הבסיס  $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$  וקטור הקואורדינטות יהפוך להיות

$$[A]_{B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**תרגיל 1.4.** יהי  $V = \mathbb{R}^2$  עם הבסיס  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ . יהי  $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V$ . חשבו את  $[v]_B$ .

פתרון. נסמן  $[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ . לכן מתקיים

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

מכאן נקבל מערכת משוואות

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 3 & 4 & y \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - 3R_1 \rightarrow R_2} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -2 & y - 3x \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 + R_2 \rightarrow R_1} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y - 2x \\ 0 & -2 & y - 3x \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2 \rightarrow R_2} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y - 2x \\ 0 & 1 & \frac{3x - y}{2} \end{array} \right)$$

לכן

$$[v]_B = \begin{pmatrix} y - 2x \\ \frac{3x - y}{2} \end{pmatrix}$$

הערה 1.5.  $[v]_B = 0$  אם ורק אם  $v = 0$ .

**משפט 1.6.** יהי  $B$  בסיס סדור של  $V$ , יהיו  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$  ויהיו  $v_1, \dots, v_k \in V$ . אזי כי

$$\left[ \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \right]_B = \sum_{i=1}^k \alpha_i [v_i]_B$$

**תרגיל 1.7.** הוכיחו:

1.  $v_1, \dots, v_k$  בת"ל אם ורק אם  $[v_1]_B, \dots, [v_k]_B$  בת"ל.

2.  $w \in \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$  אם ורק אם  $[w]_B \in \text{Span}\{[v_1]_B, \dots, [v_k]_B\}$ .

הוכחה.

1.  $\Leftarrow$  נניח ש- $v_1, \dots, v_k$  בת"ל. צ"ל ש- $[v_1]_B, \dots, [v_k]_B$  בת"ל. יהי צירוף לינארי מתאפס

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i [v_i]_B = 0 \Rightarrow \left[ \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \right]_B = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = 0$$

לפי הנתון,  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ . לכן  $[v_1]_B, \dots, [v_k]_B$  בת"ל.

$\Rightarrow$  נניח ש- $[v_1]_B, \dots, [v_k]_B$  בת"ל. צ"ל ש- $v_1, \dots, v_k$  בת"ל. יהי צירוף לינארי מתאפס

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \left[ \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \right]_B = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i [v_i]_B = 0$$

לפי הנתון,  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ . לכן  $v_1, \dots, v_k$  בת"ל.

2.  $\Leftarrow$  נניח ש- $w \in \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$ . לכן קיימים  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$  שעבורם

$$w = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \Rightarrow [w]_B = \left[ \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \right]_B = \sum_{i=1}^k \alpha_i [v_i]_B$$

כלומר  $[w]_B \in \text{Span}\{[v_1]_B, \dots, [v_k]_B\}$ .  $\Rightarrow$  נניח ש- $[w]_B \in \text{Span}\{[v_1]_B, \dots, [v_k]_B\}$ . לכן קיימים  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$  שעבורם

$$[w]_B = \sum_{i=1}^k \alpha_i [v_i]_B = \left[ \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \right]_B \Rightarrow w = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i$$

כלומר  $w \in \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$ .

□

## 2 מטריצות מעבר בין בסיסים

**2.1 הגדרה.** יהי  $V$  מרחב וקטורי ממימד  $n$ , ויהיו  $B$  ו- $C$  בסיסים (סדורים) של  $V$ . **מטריצת המעבר מ- $B$  ל- $C$**  היא המטריצה היחידה  $[I]_C^B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  המקיימת

$$\forall v \in V : [I]_C^B [v]_B = [v]_C$$

אם  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  אזי

$$[I]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [v_1]_C & \cdots & [v_n]_C \\ | & & | \end{pmatrix}$$

**2.2 דוגמה.** יהי  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$  בסיס של  $\mathbb{R}^2$ , ויהי  $S$  הבסיס הסטנדרטי. נחשב את  $[I]_S^B$ :

$$[I]_S^B = \left( \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_S \quad \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_S \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

במילים: מטריצת מעבר ביחס לבסיס סטנדרטי = לשים את הווקטורים בעמודות.

**2.3 משפט.** לכל בסיסים  $B, C$  ו- $D$ , מתקיים

$$[I]_D^C [I]_C^B = [I]_D^B$$

**2.4 מסקנה.** לכל בסיסים  $B$  ו- $C$ ,

$$[I]_B^C \cdot [I]_C^B = I$$

באופן שקול, תמיד הפיכה, ומתקיים

$$\left( [I]_C^B \right)^{-1} = [I]_B^C$$

**אלגוריתם 2.5** (אלגוריתם לחישוב מטריצה מייצגת). יהיו  $B$  ו- $C$  בסיסים של  $V$ . נניח שרוצים לחשב את  $[I]_C^B$ . יהי  $S$  הבסיס הסטנדרטי של  $V$ .

1. מחשבים את  $[I]_S^B$  - שזה אומר לשים את וקטורי  $B$  בעמודות.

2. מחשבים את  $[I]_S^C$ .

3. מחשבים את  $[I]_C^S = ([I]_S^C)^{-1}$ .

4. כופלים  $[I]_C^B = [I]_C^S [I]_S^B$ .

**תרגיל 2.6.** נתונים הבסיסים הבאים של  $\mathbb{R}_2[x]$ :

$$B_1 = \{1 - x, 2 - x, 1 - 3x - x^2\}$$

$$B_2 = \{1 + x^2, x + x^2, x^2\}$$

חשבו את  $[I]_{B_1}^{B_2}$ .

פתרון. הבסיס הסטנדרטי הוא  $S = \{1, x, x^2\}$ . נחשב את מטריצות המעבר בין הבסיסים:

$$[I]_S^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, [I]_S^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

כדי לחשב את  $[I]_{B_1}^S$ , נהפוך את  $[I]_S^{B_1}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} R_2+R_1 \rightarrow R_2 \\ -R_3 \rightarrow R_3 \end{matrix}]{R_2+R_1 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} R_1-R_3 \rightarrow R_1 \\ R_2+2R_3 \rightarrow R_2 \end{matrix}]{R_1-R_3 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1-2R_2 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

לכן

$$[I]_{B_1}^S = ([I]_S^{B_1})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

בסך הכל,

$$[I]_{B_1}^{B_2} = [I]_{B_1}^S [I]_S^{B_2} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

**תרגיל 2.7.** יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $\mathbb{F}$  ממימד  $n$ , יהי  $B$  בסיס של  $V$ , ותהי  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  מטריצה הפיכה. הוכיחו שקיים בסיס יחיד  $B'$  של  $V$  שעבורו  $A = [I]_{B'}^B$ .

הוכחה. נתחיל מלהוכיח יחידות: נניח שמצאנו בסיס  $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$  כזה. נסמן  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ . לפי הנתון,  $[I]_B^{B'} = A$ , ולכן לכל  $i = 1, \dots, n$

$$[w_i]_B = C_i(A) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \Rightarrow w_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} v_j$$

כלומר, הראינו שכל בסיס  $B'$  המקיים את הדרוש חייב להיות אותו דבר. זה מוכיח יחידות. כדי להוכיח קיום, צריך למצוא בסיס  $B'$  שעבורו  $[I]_B^{B'} = A$ . אבל כבר יש לנו מועמד - נגדיר

$$B' = \{w_1, \dots, w_n\}$$

עבור

$$w_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} v_j$$

אם נדע ש- $B'$  באמת בסיס, אז נקבל כי

$$[w_i]_B = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = C_i(A) \Rightarrow [I]_B^{B'} = A$$

נוכיח ש- $B'$  בסיס. ראשית, נוכיח ש- $B'$  בת"ל: יהי צירוף לינארי מתאפס

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i = 0$$

נעבור לווקטור הקואורדינטות:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i(A) = \sum_{i=1}^n \alpha_i [w_i]_B = \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i \right]_B = 0$$

אבל הוכחתם בהרצאה (או תוכיחו) שהעמודות של מטריצה הפיכה הן בת"ל. לכן,  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ .

הוכחנו ש- $B'$  בת"ל, וכמו כן מתקיים  $|B'| = n$ . לכן, לפי משפט השלישי חינם,  $B'$  בסיס של  $V$ .  $\square$