

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1. מצאו את כל האסימפטוטות של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{x^3}{\sin^2(x) + x^2} \quad \text{א.} \quad g(x) = e^{\left(\frac{1}{x}\right)} \quad \text{ב.} \quad h(x) = \frac{1}{\ln(x)} \quad \text{ג.}$$

2. פתרו את האינטגרלים הבאים:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cos(x) dx \quad \text{א.} \quad \int \arctan(x^2 - x - 6) dx \quad \text{ב.} \quad \int \frac{e^x}{e^{2x} + e^x + 1} dx \quad \text{ג.}$$

$$3. \quad \text{נביט בפונקציה } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

$$\text{א. הוכיחו כי } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^2} \text{ (רמז: כפל בצמוד)}$$

ב. מצאו את המקסימום של הפונקציה $f(x)$ בקטע $[1, \infty)$. האם יש לה מינימום?

4. תהי $f(x)$ גזירה פעמיים ב \mathbb{R} , המקיימת $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 1$.

א. הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in (0, 2)$ עבורה $f'(c) = 0$.

ב. הוכיחו כי קיימת נקודה $d \in (0, 2)$ עבורה $f''(d) < 0$.

$$5. \quad \text{נביט בפונקציה } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

א. עבור איזה ערך של a הפונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה $x = 0$? הוכיחו שהיא אכן גזירה אז.

ב. האם $f'(x)$ רציפה ב $x = 0$?