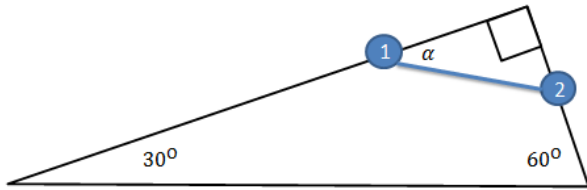


שיעור חזרה במכניקה 2013 – נתי

נפתור מבחן, שאלה בקפלר, ושאלה מגניבה שנתי מצא.

שאלה #1: נתונים שתי חרוזים המחוברים ע"י מוט והם על מסילה הנתונה בשמאל.

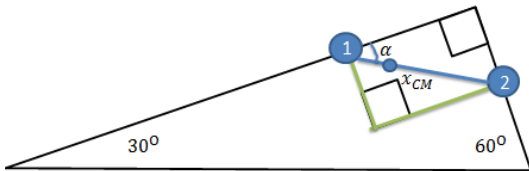


המסות הן $m_1 = 100kg, m_2 = 300kg$. צריך למצוא את הזווית שנוצרה.

פתרון:

צריך לבחור נקודה נבונה ולהשתמש בה בהתאם ע"פ הטורקים וכו'. נסמן את מרכז המסה, וחישוב פשוט יראה

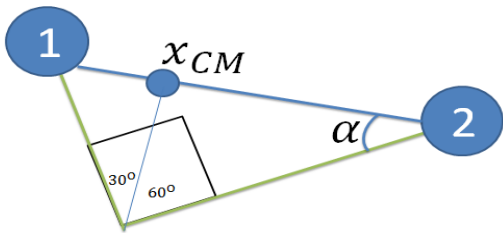
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{m_2}{m_1}$$



איך נבחר את הנקודה? נסמן שתי אנכים! ונבחר את נקודת המפגש שלהם. נוכיח ש mg עובר דרך הנקודה הזו.

מתקיים כי סכום הטורקים שווה ל0. ידוע כי סכום הטורקים בכל נקודה ונקודה במערכת מתאפס, ולכן בהכרח שזה גם מתקיים עבור הנקודה הזו ספציפית. לכן, מדובר שם בסכום של שתי אפסים (הטורקים של הנורמל) פלוס הטורק של mg וסכומם שווה לאפס. לכן בהכרח שהטורק של mg שווה אפס. איך זה קורה? או כשהזווית ביניהם אפס, או כשהמרחק הוא אפס. ברור שאפשר לבחור מרחק שיהיה שונה מאפס, ולכן בהכרח שהם באותו כיוון, מ.ש.ל.

מכאן הפתרון כמעט טריוויאלי. נראה זאת:



מתקבל המשולש שמשמאל. נסמן את הישר המחבר את

הנקודה עם מרכז המסה ב y , ונרשום את משפט הסינוסים

$$\text{לכל אחד מהמשולשים הקטנים. } \frac{y}{\cos \alpha} = \frac{x_1}{\sin 30}, \frac{y}{\sin \alpha} = \frac{x_2}{\sin 60}$$

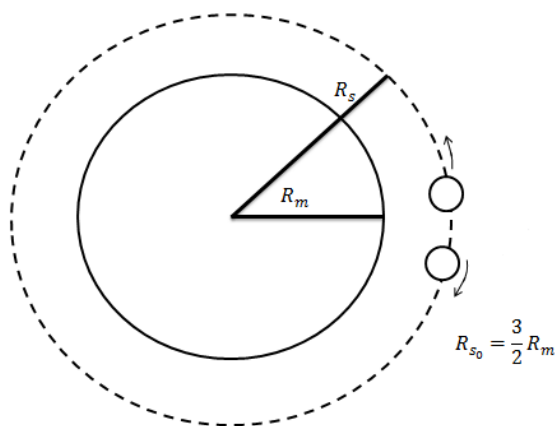
$$\text{מתקבל } \dots = \frac{\sin 60}{\sin 30} \frac{x_1}{x_2} = \dots = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y \sin 60}{y \sin 30} = \frac{x_2}{x_1} \text{ והשאר הוא חישוב פשוט.}$$

שאלה #2: מהמבחן של הנדסה במכניקה לשנת תשע"ג.

ירח וסביבו לוויין ורובוט, ברדיוס התחלתי נתון, הלוויין בכיוון מנוגד לרובוט, אך באותה מהירות. (ברור שיתנגשו מתישהו)

פתרון:

מצא את המהירות:



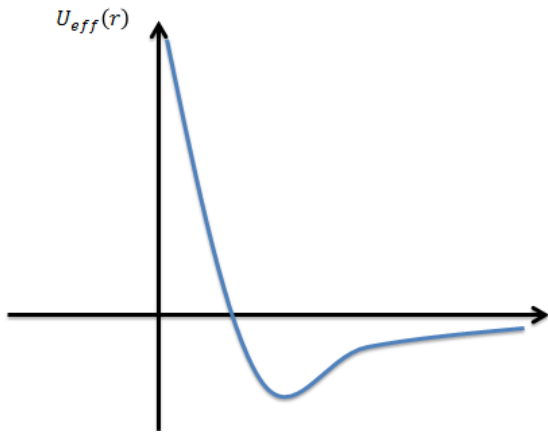
א. מתקיים כי $\Sigma F = ma \rightarrow F_r = ma_r$ ולכן

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_0}} \text{ נעביר אגפים ונקבל } \frac{GMm}{R_0^2} = \frac{mv_0^2}{R_0}$$

וניתן לראות שאין הוא תלוי במסה, ולכן המהירות היא קבועה. מתקיים $v_1 = v_0$.

ב. מבקשים את את הסרטוט של הפוטנציאל האפקטיבי.

ההגדרה של פוטנציאל אפקטיבי היא $U_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$. איך מפתחים את ההגדרה הזו? ע"פ ההגדרות של אנרגיה קינטית ותנע זוויתי, מומלץ לבצע זאת עצמאית.



נציב את הגדרת התנע הזוויתי בביטוי ונקבל זה שמשמאל. $U_{eff} = \frac{m_s R_0^2 v_0^2}{2r^2} - \frac{GMm_s}{r}$. והגרף המתקבל הוא

ג. מהי האנרגיה הכוללת שלו? מתקיים כי בכל נקודה $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{eff}$ אבל הרדיוס הוא קבוע, ולכן האנרגיה הכוללת שווה בדיוק לפוטנציאל האפקטיבי.

ד. מהי האנרגיה ברדיוס ההתחלתי שלנו (או בכל נקודה בעצם)?

$$E = U_{eff}(R_0) = \frac{m_s v_0^2}{2} - \frac{GMm_s}{R_0} = \frac{m_s Gm}{2R_0} - \frac{GMm_s}{R_0} = -\frac{GMm_s}{2R_0}$$

לאחר ההתנגשות של הרובוט והלוויין, הם נצמדים ומתקבלת המסה $m_z = m_s + m_r$. גם כן נתון שהמהירות היא $v = f v_0$

ה. אם נגדיר את המערכת כך שהיא הרובוט והלוויין, נקבל שיש שימור תנע, ועל כן

$$m_s v_0 - m_r v_0 = m_z f v_0 \quad \text{מתקיים כי } f = \frac{m_s - m_r}{m_s + m_r} \text{ וזה הגיוני כי בד"כ יש איבוד אנרגיה}$$

בהתנגשות פלסטית.

ו. מהו ההפרש באנרגיה הקינטית? ניתן להציב בפשוטות בנוסחה. $E_k = \frac{1}{2} m_z f^2 v_0^2$. את האנרגיה

לפני גם ניתן להביע בקלות, וחשוב חיסור ידוע לכולם. ☺

ז. לאחר ההתנגשות, הם מתחילים לנוע באליפסה. מצא את הפוטנציאל האפקטיבי של הגופים כעת. כאן L קבוע גם כן כי מדובר בכח מרכזי, ולכן הוא קבוע.

ח. אנחנו מניחים שמיד אחרי הנקודה הוא עוד לא מספיק להתעקם, ולכן ניתן להניח שמהירות והמיקום עדיין מאונכים זה לזה-מה שלא נכון בתנועה אליפטית רגילה. ומתקבל $L = R_0 m_0 f v_0$

$$\text{ולכן } U_{eff} = \frac{m_z R_0^2 f^2 v_0^2}{2r^2} - \frac{GMm_z}{r} \text{ הביטוי דומה מאוד, ולכן גם הדיאגרמה.}$$

ט. מצאו את הרדיוס המינימלי r_p במסלול האליפטי. נאמר כך: $E = U_{eff}(r_p)$ וגם ידוע שמתקיים

$$\text{כי } E = \frac{1}{2} m v^2 + U(r) = \frac{1}{2} m_z f^2 v_0^2 - \frac{GMm_z}{R_0} = \frac{GMm_z}{R_0} \left[\frac{f^2}{2} - 1 \right]$$

$$\text{האפקטיבי ונקבל } U_{eff}(r_p) = \frac{GMm_z}{r_p} \left[\frac{f^2}{2} - 1 \right] \text{ ועל כן נקבל את התשובה.}$$

$$\text{י. נניח ש } r_p = \frac{2}{3} R_0, \text{ מצאו את } f. \text{ הצבה פשוטה נותנת } f = \sqrt{\frac{4}{5}}$$

שאלה #3: מבחן של סלוצקין. שנת תשע"א סמסטר א' מועד ב'.

2. גוף נע תחת השפעתם של מספר כוחות. אחד מהם ניתן על-ידי:

$$F = xy^2 \hat{x} + (x^2 y + 2y) \hat{y}$$

א. הוכיחו כי כוח זה הוא כוח משמר.

ב. מצאו את האנרגיה הפוטנציאלית $U(x,y)$ כתוצאה מכוח זה.

ג. גוף נע במסלול: $\vec{r}(t) = t^2 \hat{x} + (2t + 1) \hat{y}$, מהי העבודה שנעשתה ע"י הכוח הנ"ל בין $t=0$ ל- $t=3$.

א. מוכיחים שהכח משמר: $2xy = \frac{\partial F_y}{\partial x} \stackrel{?}{=} \frac{\partial F_x}{\partial y} = 2xy$ השיוויון מתקיים, ולכן הוא משמר.

ב. ע"פ הגדרה $\frac{\partial U}{\partial x} = F_x, \frac{\partial U}{\partial y} = F_y$ ו $F = -\vec{\nabla}U$ לכן מתקבל $U = -\frac{x^2y^2}{2} - y^2 + const$. ונבחר

קבוע 0 כי זה לא מהותי, ולכן $U(x, y) = -\frac{x^2y^2}{2} - y^2$

ג. ידוע כי מתקיים $W = -\Delta U = -(U_3 - U_1) = U_1 - U_3$

וגם ידוע המיקום בכל זמן, והוא $t = 3 \rightarrow (x, y) = (9, 7)$, $t = 0 \rightarrow (x, y) = (0, 1)$. נציב

זאת בהגדרת העבודה ע"פ פוטנציאל ולכן $W = U_1 - U_3 = \frac{0^2 \cdot 1^2}{2} + 1^2 - \frac{9^2 \cdot 7^2}{2} - 7^2 =$

$1 - 1984.5 - 49 = -2,032.5$. $W = -2,032.5$