פתרון בוחן באנליזה

חלק 1: סדרות

שאלה 1

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n^4+3n^3-2n+1}{3n^4+3n^3-2n+1}\right)^5=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^4(6+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4})}{n^4(3+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4})}\right)^5=\left(\frac{5}{3}\right)^5=32$$

ב. $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+5}-\sqrt{n})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+5}+\sqrt{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+5-n}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}\cdot 5}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{\sqrt{n}}}{\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1\right)}=\frac{0}{2}=0$$

ג. $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1-1)}{n!(n+1+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1$$

ד. $$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}$$

לכל $3<n\in N$ מתקיים:

$$0<\frac{3^n}{n!}=\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdots\frac{3}{n}\le\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdots\frac{3}{n}=\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^{n-3}=2\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^{n-3}\to 0$$

ולכן לפי משפט הסנדויץ': $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}=0$

שאלה 2

נתבונן בסדרה המוגדרת ע"י:

$$a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}$$
$$a_1 = \sqrt{3}$$

א. הוכיחו כי $\{a_n\}$ מונוטונית עולה
ב. הסיקו כי $\{a_n\}$ מתכנסת ומצא את גבולה

פתרון

א. נוכיח ע"י אינדוקציה.
בדיקה: עבור n=1:

$$a_2 = \sqrt{3 + a_1} = \sqrt{3 + \sqrt{3}} > \sqrt{3} = a_1$$

הנחה: נניח כי עברו *n* מסויים: $a_{n+1} > a_n$
נוכיח כי זה מתקיים עברו *n+1* כלומר ש: $a_{n+2} > a_{n+1}$
הוכחה: $a_{n+2} = \sqrt{3 + a_{n+1}} > \sqrt{3 + a_n} = a_{n+1}$
ולכן a_n מונוטונית עולה.

ב. a_n חסומה מלרע ע"י $\sqrt{3}$.
נוכיח שהיא חסומה מלעיל ע"י 3 ע"י אינדוקציה.
בדיקה: עבור n=1:

$$a_1 = \sqrt{3} < 3$$

הנחה: נניח כי עברו *n* מסויים: $3 > a_n$.
נוכיח כי זה מתקיים עברו *n+1* כלומר ש: $3 > a_{n+1}$
הוכחה: $a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n} < 3$
ולכן a_n חסומה מלעיל ולכן חסומה.
קיבלנו שa_n חסומה ומונוטונית ולכן מתכנסת. נמצא את הגבול שלה:

$$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3 + a_n} = \sqrt{3 + c}$$

ולכן: $c = \sqrt{3 + c}$

$$c^2 = 3 + c$$
$$0 = c^2 - c - 3$$
$$c = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

הסדרה חיובית ולכן הגבול חיובי ולכן

$$c = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

<u>חלק 2: פונקציות</u>

<u>שאלה 3</u>

האם לפונקציה f קיים הגבול בנקודה x=2?

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3 & x\geq 2 \\ \dfrac{x}{2} & x<2 \end{cases} \quad f(x)=\begin{cases} x^2-3 & x\geq 2 \\ \dfrac{x}{2} & x<2 \end{cases}$$

פתרון:

נחשב את הגבולות החד צדדים ונבדוק אם הם שווים:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x^2-3) = 1$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\frac{x}{2} = 1$$

הגבולות החד צדדים שווים ולכן הגבול קיים (והוא שווה 1).

<u>שאלה 4</u>

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2+sin\left(\frac{1}{x}\right)}$

נשתמש במשפט הסנדויץ':

$$1 = 2-1 \leq 2+\sin\frac{1}{x} \leq 2+1 = 3$$

ולכן, עבור x>0 נקבל:

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2+\sin\frac{1}{x}} \leq 1$$

נכפיל ב-x ונקבל:

$$\frac{x}{3} \leq \frac{x}{2+\sin\frac{1}{x}} \leq x$$

X פונקציה אלמנטרית ומגדרת ב-0 ומתקיים:

$$x\to 0, \qquad \frac{x}{3}\to 0$$

ולכן לפי משפט הסנדויץ':

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{2+sin\left(\frac{1}{x}\right)} = 0$$

ב. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(nx)}{\sin(mx)}$

פתרון:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(nx)}{\sin(mx)} = \lim_{x \to 0} \frac{nx}{nx} \cdot \frac{\sin(nx)}{1} \cdot \frac{mx}{mx} \cdot \frac{1}{\sin(mx)} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{nx}{mx} \cdot \frac{\sin(nx)}{\mathrm{nx}} \cdot \frac{mx}{\sin(mx)} = \lim_{x \to 0} \frac{nx}{mx} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{n}{m}$$