תרגיל בית 11 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשע"ח

שאלה 1. יהי M מודול נוצר סופית ומפותל מעל תחום שלמות R. הוכיחו כי M לא נאמן.

שאלה 2. יהי R תחום ראשי, ותהינה מטריצות $A \in M_n(R)$ ו-$B \in M_m(R)$. נתבונן במטריצת הבלוקים

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{n+m}(R)$$

הוכיחו $M_{A\oplus B} \cong M_A \oplus M_B$ כמודולים מעל R.

שאלה 3. חשבו את הסדר של החבורה החיבורית

$$G = \left\langle a, b \;\middle|\; \begin{aligned} 88a + 20b &= 0 \\ -212a - 56b &= 0 \end{aligned} \right\rangle$$

שאלה 4. מצאו את הגורמים המשתמרים מעל החוג $\mathbb{Z}$ של המודול $M_A = \mathbb{Z}^3 / A \cdot \mathbb{Z}^3$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

שאלה 5. יהי F שדה. נתבונן במודול $M = F[x]^2 / AF[x]^2$ מעל $F[x]$ כאשר $A = \left(\begin{smallmatrix} x & x \\ x & x \end{smallmatrix}\right)$. מהו המימד של M כמרחב וקטורי מעל F?

שאלה 6. יהיו K, L, M, N מודולים מעל חוג R. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.
רמז: לטענות המקבילות עבור מרחבים וקטורים מעל שדה יש את אותן תשובות.

א. נניח $L, N, K \leq M$ תת־מודולים כך ש-$M = N \oplus K$. אז $L = (L \cap N) \oplus (L \cap K)$.

ב. נניח $N, K \leq M$ תת־מודולים כך ש-$M = N \oplus K$ ו-$N \leq L$.
אז $L = (L \cap N) \oplus (L \cap K)$.

ג. אם $K \subseteq N$, $K + L = N + L$ וגם $K \cap L = N \cap L$, אז $K = N$.

ד. נניח $L, N, K \leq M$ תת־מודולים כך ש-$K + L = N + L$ וגם $K \cap L = N \cap L$, אז $K = N$.

שאלה 7. יהי M מודול מעל חוג R. תת־מודול $N \leq M$ יקרא חיוני (לפעמים נקרא גדול) אם לכל תת־מודול $\{0\} \neq H \leq M$ מתקיים $N \cap H \neq \{0\}$. נסמן תת־מודול חיוני $N \leq_e M$.

א. הוכיחו שאם $N_1, N_2 \leq_e M$, אז $N_1 \cap N_2 \leq_e M$.

ב. הוכיחו כי $N \leq M$ הוא תת־מודול חיוני אם ורק אם לכל $0 \neq a \in M$ קיים $r \in R$ כך ש-$ra \neq 0$ ו-$ra \in N$.

ג. העזרו בלמה של צורן כדי להוכיח שלכל תת־מודול $N \leq M$ קיים תת־מודול $K \leq M$ כך שמתקיים $N \oplus K \leq_e M$.

שאלה 8. יהי p מספר ראשוני. הוכיחו כי המטריצות הבאות מגודל $p \times p$ הן צמודות מעל $\mathbb{F}_p$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(במטריצה A יש אחדות באלכסון הראשי, ובאלכסון שמתחתיו. במטריצה B יש אפסים על האלכסון הראשי ואחד בפינה העליונה הימנית.)

בהצלחה!