ב"א אנליזה 2 תשעט מועד ב

1. חשבו את:

(א) $\int \frac{\ln(x)}{x(\ln(x)+1)}\mathrm{d}x$.

פתרון: נשתמש בהצבה:

$$\int \frac{\ln(x)}{x\left(\ln(x)+1\right)}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} t=\ln(x) \\ \mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int \frac{t}{t+1}\mathrm{d}t = \int \frac{t+1-1}{t+1}\mathrm{d}t = \int \left(1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= t - \ln|t+1| + C = \ln(x) - \ln|\ln(x)+1| + C$$

(ב) $\int \cos(x)\sin(2x)\mathrm{d}x$.

פתרון: מזהות טריגונמטרית ידועה,

$$\cos(x)\sin(2x) = \cos(x)2\sin(x)\cos(x)$$

ואז נשתמש בהצבה:

$$\begin{aligned}\int \cos(x)\sin(2x)\mathrm{d}x = 2\int \cos^2(x)\sin(x)\mathrm{d}x &= \left\{ \begin{array}{c} t=\cos(x) \\ \mathrm{d}t=-\sin(x)\mathrm{d}x \end{array} \right\} = \\ &= 2\int -t^2\mathrm{d}t \\ &= -2\int t^2\mathrm{d}t \\ &= -2\frac{t^3}{3}+C \\ &= -2\frac{\cos^3(x)}{3}+C\end{aligned}$$

2.

(א) מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

פתרון: אסימפטוטות אנכיות: הפונקציה חיובית בכל $\mathbb{R}$ ולכן אין אסימפטוטה אנכית.

אסימפטוטה משופעת מימין: נחשב את הגבול

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{1} = 1$$

ו

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)-ax=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=0$$

ולכן $y=x$ אסימפטוטה משופעת מימין.

<u>אסימפטוטה משופעת משמאל:</u> נחשב את הגבול

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to\infty}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-\sqrt{1}=-1$$

ו

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)-ax=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}+x=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}=0$$

ולכן $y=-x$ אסימפטוטה משופעת משמאל.

(ב) קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x$.

פתרון: נמצא את הקדומה $\int \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x$ בעזרת שיטת ההצבה

$$\int\frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{c} t=\ln(x)\\ \mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}x\end{array}\right\}=\int t\mathrm{d}t=\frac{t^2}{2}+C=\frac{\ln^2(x)}{2}+C$$

ולכן

$$\int_1^\infty\frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{\ln^2(t)}{2}-\frac{\ln^2(1)}{2}\right]=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln^2(t)}{2}=\infty$$

ולכן האינטגרל מתבדר.

.3

(א) חשבו את הגבול

$$.\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\frac{e^t}{1+t}\mathrm{d}t}{1-\cos(x)}$$

פתרון: כיוון ש $\lim_{x\to0}\int_0^{x^2}\frac{e^t}{1+t}\mathrm{d}t=0$ (כיוון ש $\frac{e^t}{1+t}$ רציפה והקטע בו עושים אינטגרל שואף ל 0) נוכל בעזרת המשפט היסודי של החדוא לקבל:

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\frac{e^t}{1+t}\mathrm{d}t}{1-\cos(x)}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to0}\frac{2x\cdot\frac{e^{\left(x^2\right)}}{1+x^2}}{\sin(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sin(x)}\cdot\lim_{x\to0}\frac{e^{\left(x^2\right)}}{1+x^2}=2\cdot\frac{e^0}{1+0}=2$$

(ב) חשבו את גבול הסדרה $a_n=\sum_{k=1}^n\frac{k}{n^2}\cdot\sqrt[n]{e^k}$.

פתרון: נראה שזהו סכום רימן:

$$a_n=\sum_{k=1}^n\frac{k}{n^2}\cdot\sqrt[n]{e^k}=\sum_{k=1}^n\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}\cdot e^{\frac{k}{n}}$$

ועבור $f(x)=xe^x$ שהיא רציפה בקטע $[0,1]$ נקבל ש

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}\cdot e^{\frac{k}{n}}\to\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x$$

נחשב את $\int xe^x\mathrm{d}x$ בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$\int xe^x\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{ll} f=x & f'=1\\ g'=e^x & g=e^x\end{array}\right\}=xe^x-\int e^x\mathrm{d}x=xe^x-e^x+C$$

ולכן

$$\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x=\left[xe^x-e^x\right]\Big|_0^1=\left(e^1-e^1\right)-(0-1)=1$$

.4

(א) חשבו את הסכום $1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\cdots$.

פתרון: נכתוב עם סיגמה

$$1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

ומכיוון ש

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$$

נקבל שהטור שלנו הוא פשוט $\sin(1)$.

(ב) קרבו את $\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)$ עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{100}$.

פתרון: הטור ההנדסה הוא

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

ואם נציב $-x$ במקום x נקבל

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$$

אינטגרל על שני האגפים (בהסתמך תיאוריה של התכנסות במש של טורים ואינטגרלים איבר איבר) נקבל

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-t)^n\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(-x)^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$

לכל $|x|<1$ ולכן

$$\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

וזהו טור לייבניץ ולכן מתקיים שלכל k, יש את החסם

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right|\le\left|\frac{(-1)^k}{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right|=\frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

שזהו חסם על השגיאה $\left|\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right|$. כיוון שרוצים שגיאה שקטנה מ $\frac{1}{100}$ נחפש k עבורו $\frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \leq \frac{1}{100}$. עבור $k=5$ נקבל $\frac{1}{100} = \frac{1}{4\cdot 24} < \frac{1}{6\cdot 32} = \frac{1}{2^5} \cdot \frac{1}{6}$. מכאן שהקירוב

$$\sum_{n=0}^{5-1} \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4} = \frac{77}{192}$$

עם שגיאה קטנה מ $\frac{1}{100}$כמבוקש.

5. תהא f פונקציה רציפה ונגדיר את הפונקציה $g(x)=f(2x)$.

(א) נניח כי $a=\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$, חשבו את $\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x$.
פתרון: נשתמש בשיטת ההצבה:

$$\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{c} x=2t \\ \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t \end{array}\right\} = \int_0^2 f(2t)\cdot 2\mathrm{d}t = 2\int_0^2 g(t)\mathrm{d}t$$

ולכן

$$\int_0^2 g(t)\mathrm{d}t = \frac{\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x}{2} = \frac{a}{2}$$

(ב) הוכיחו/הפריכו: $\int_0^x g(t)\mathrm{d}t \geq \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
פתרון: הפרכה: $f(x)=-x$ ואז $g(x)=-2x$ ואז

$$\int_0^x g(t)\mathrm{d}t = \int_0^x -2t\mathrm{d}t = -t^2\Big|_0^x = -x^2$$

ו

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x -t\mathrm{d}t = -\frac{t^2}{2}\Big|_0^x = -\frac{x^2}{2}$$

ומתקיים

$$-x^2 \leq -\frac{x^2}{2}$$

ושיוויון רק במקרה $x=0$.