

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 20 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

משך המבחן: שלוש שעות. מרצה: ד"ר ארז שיינר.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א.
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{2x} - 1)^7 (\ln(e+x))^2}{(\sin(3x))^3 (1 - \cos(x))^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\left(\frac{e^{2x} - 1}{2x}\right)^7}_{\rightarrow 1^7} \cdot \underbrace{(\ln(e+x))^2}_{\rightarrow 1^2} \cdot \underbrace{\left(\frac{3x}{\sin(3x)}\right)^3}_{\rightarrow 1^3} \cdot \underbrace{\left(\frac{x^2}{1 - \cos(x)}\right)^2}_{\rightarrow 2^2} \cdot \frac{2^7}{3^3} = \frac{2^9}{3^3}$$

ב.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \sin(\sqrt{x^2 + 1} - x) \right)$$

נשים לב כי

$$\sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \rightarrow_{x \rightarrow \infty} 0$$

ולכן

$$x \cdot \sin(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \frac{\sin(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x) \cdot x = \underbrace{\frac{\sin(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}}_{\rightarrow \frac{1}{2}}$$

הגבול האחרון הוא כיוון ש

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1}$$

סה"כ הגבול של הביטוי הוא חצי.

ג.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$$

נחשב את גבול המנה

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \rightarrow 0$$

כיוון שגבול המנה קטן מ1, הסדרה שואפת לאפס.

2.

א. חשבו את $\int x \ln(x) dx$.

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx$.

3. נביט בפונקציה $f(x) = x + \frac{x}{e^x}$.

א. הוכיחו שלכל $a \in \mathbb{R}$ קיים פתרון למשוואה $f(x) = a$.

ב. הוכיחו שלכל $a \in \mathbb{R}$ קיים פתרון יחיד למשוואה $f(x) = a$.

סעיף א':

יהי $a \in \mathbb{R}$, נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = x(1 + e^{-x}) - a$$

נחשב גבולות בקצוות

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x(1 + e^{-x}) - a = \{\infty(1 + 0) - a\} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(1 + e^{-x}) = \{-\infty(1 + \infty)\} = -\infty$$

לכן יש נקודה מעל הציר, ונקודה מתחת לציר ולפי משפט ערך הביניים כיוון ש h רציפה כצירוף רציפות, הפונקציה חותכת את הציר.

סעיף ב':

$$h'(x) = 1 + e^{-x} - xe^{-x} = 1 + e^{-x}(1 - x) = 1 + \frac{1 - x}{e^x} = \frac{1 - x + e^x}{e^x}$$

המכנה תמיד חיובי, לכן על מנת לדעת את סימן הנגזרת, עלינו לגלות את הסימן של המונה

$$g(x) = 1 - x + e^x$$

$$g'(x) = -1 + e^x = e^x - 1$$

הנגזרת הזו חיובית כאשר $x > 0$ ושלילית כאשר $x < 0$

על כן, g יורדת בתחום $(-\infty, 0]$ ועולה בתחום $[0, \infty)$ ולכן יש לה מינימום ב $x = 0$.

והרי $g(0) = 2$ ולכן $g \geq 2$ בכל הממשיים.

לכן

$$h' > 0$$

בכל הממשיים ולכן h עולה בכל הממשיים ולכן אין לה יותר מפתרון אחד.

4.

א. תהי f גזירה בקטע A המקיימת לכל $x \in A$ כי $|f'(x)| \leq 1$.

הוכיחו כי לכל שני מספרים $x_1, x_2 \in A$ מתקיים כי $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$.

יהיו $x_1 < x_2 \in A$ (אם הם שווים קל להראות שהתרגיל מתקיים).

f רציפה ב $[x_1, x_2]$ וגזירה ב (x_1, x_2) (כי f גזירה בכל A)

לפי לגראנז' קיימת נקודה $x_1 < c < x_2$ כך ש

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| = |f'(c)| \leq 1$$

נכפול ב $|x_2 - x_1|$ ונקבל כי

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq |x_2 - x_1|$$

ב. תהיינה שתי סדרות a_n, b_n כך ש $a_n - b_n \rightarrow 0$.

הוכיחו כי $\arctan(a_n) - \arctan(b_n) \rightarrow 0$.

ראשית

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

(אין צורך בערך המוחלט כי זה אי שלילי.)

לפי סעיף א', לכל שתי נקודות x_1, x_2 מתקיים כי

$$|\arctan(x_2) - \arctan(x_1)| \leq |x_2 - x_1|$$

נציב את הסדרות באי השיויון הזה

$$|\arctan(b_n) - \arctan(a_n)| \leq |b_n - a_n| \rightarrow 0$$

ולכן גם

$$|\arctan(b_n) - \arctan(a_n)| \rightarrow 0$$

לפי חצי סנדוויץ' על הרצפה.

5. תהי סדרה a_n המקיימת את נוסחת הנסיגה $a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 1$.

א. הוכיחו כי a_n מונוטונית עולה.

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 + 1 > 0$$

ב. חשבו את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

אם הסדרה חסומה היא מתכנסת לגבול סופי כיוון שהיא עולה, נסמנו $a_n \rightarrow L$

נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim a_n^2 + a_n + 1$$

ולכן

$$L = L^2 + L + 1$$

ולכן

$$L^2 + 1 = 0$$

אין מספר ממשי שמקיים את המשוואה הזו, בסתירה, ולכן הסדרה אינה חסומה, ולכן $a_n \rightarrow \infty$

א. חשבו את גבול הסדרה $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(n+k)^9}{n^{10}}$.

ב. נסמן ב R_n את השגיאה של קירוב של $\sin(2)$ על ידי פולינום טיילור מסדר n של הפונקציה $f(x) = \sin(x)$ (סביב הנקודה 0). הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.