

תרגיל בית 9 באלגברה מופשטת 88-211 סמסטר א' תשע"ו

שאלה 1. אם $f: G \rightarrow H$ היא אפימורפיזם, אז H נקראת תמונה אפימורפית של G . מצאו את כל התמונות האפימורפיות של D_4 עד כדי איזומורפיזם. רמז: משפט האיזומורפיזם הראשון.

שאלה 2. תהי G חבורה סופית מסדר אי זוגי. הוכיחו שלכל איבר $x \in G$ מתקיים $x^{-1} \notin \text{conj}(x)$.

שאלה 3. מצאו את $|\text{conj}(\sigma)|$ כאשר $\sigma = (2573) \in S_{14}$.

שאלה 4. יהיו הומומורפיזמים $f: G \rightarrow H$ ו- $g: H \rightarrow G$ כך ש- $f \circ g = \text{id}_H$.

א. הוכיחו כי g חח"ע ו- f על.

ב. הוכיחו כי $G = \ker(f) \times \text{im}(g)$.

שאלה 5. יהי הומומורפיזם $f: G \rightarrow H$. הוכיחו שאם $H \leq G$ תת-חבורה מאינדקס 2 וגם שהגרעין $\ker(f)$ לא מוכל ב- H , אז $G \cong H \times \mathbb{Z}_2$. רמז: השאלה הקודמת.

שאלה 6. נתונות החבורות הבאות מסדר 24: $S_4, \mathbb{Z}_{24}, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_4 \times S_3, \mathbb{Z}_3 \times D_4$, $\mathbb{Z}_3 \times Q_8, \mathbb{Z}_2 \times A_4, D_{12}$ ו- $SL_2(\mathbb{Z}_3)$ (מטריצות 2×2 עם דטרמיננטה 1 מעל השדה \mathbb{Z}_3). בחרו לפחות ארבע מהן והוכיחו שאף אחת מהן לא איזומורפית לאחרות שבחרתן. רמז: סדר של איברים.

אגב, ישנן 15 חבורות מסדר 24 עד כדי איזומורפיזם. האם אתם יכולים להוסיף עוד כמה לרשימה?

שאלה 7. חבורה G תקרא פשוטה אם אין לה תת-חבורות נורמליות לא טריוויאליות. כלומר G פשוטה אם תת-החבורות הנורמליות היחידות שלה הן $\{e\}$ ו- G . נתונה שרשרת עולה של חבורות פשוטות $G_1 \subseteq G_2 \subseteq G_3 \subseteq \dots$. הוכיחו שהאיחוד $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ הוא גם חבורה פשוטה.

שאלה 8. כעת נראה שקיים זוג של חבורות לא איזומורפיות המשוכנות אחת בתוך השנייה. נזכיר כי חבורה A משוכנת בחבורה B אם קיים שיכון $f: A \rightarrow B$. נסמן $G = \bigcup_{n \geq 5} S_n$ איחוד כל חבורות הסימטריה S_n עבור $n \geq 5$, ונסמן $H = \bigcup_{n \geq 5} A_n$ איחוד כל חבורות החילופין A_n עבור $n \geq 5$.

הערה. אנו יכולים לראות את S_n כתת-חבורה של S_{n+1} לפי השיכון הסטנדרטי, השולח תמורה σ של n איברים לתמורה $\hat{\sigma}$ של $n+1$ איברים לפי $\hat{\sigma}(i) = \sigma(i)$ לכל $1 \leq i \leq n$ ומקבע את האיבר האחרון $\hat{\sigma}(n+1) = n+1$. להמשך התרגיל נשתמש בנקודת מבט זו כשנדון בחבורות G ו- H .

א. הראו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימים שיכונים $A_n \hookrightarrow S_n \hookrightarrow A_{n+2}$. רמז: השיכון הראשון הוא ברור לפי הכלה. לשיכון השני הגדירו העתקה

$$\phi_n : S_n \rightarrow A_{n+2}$$

$$\sigma(i) \mapsto \begin{cases} \sigma(i-2) + 2 & 3 \leq i \leq n+2 \\ 1 & i = 1 \wedge \text{sign}(\sigma) = 1 \\ 2 & i = 2 \wedge \text{sign}(\sigma) = 1 \\ 2 & i = 1 \wedge \text{sign}(\sigma) = -1 \\ 1 & i = 2 \wedge \text{sign}(\sigma) = -1 \end{cases}$$

כלומר אם $3 \leq i \leq n+2$ אז $\phi_n(\sigma)(i) = \sigma(i-2) + 2$; אם σ היא תמורה זוגית, אז נשלח אותה "להזזה" שלה בשני מקומות בתוך A_{n+2} , ואם σ תמורה אי-זוגית אז היא תשלח לאותה "הזזה" כפול החילוף (12). הראו מהבנייה כי תמונת ϕ_n מוכלת ב- A_{n+2} ושהיא הומומורפיזם מוגדר היטב. אתגר: חשבו למה אי אפשר לשכן את S_n בתוך A_{n+1} עבור $n \geq 2$.

ב. הראו כי G משוכנת בתוך H .

הדרכה: בדרך אחת ניתן לשים לב כי החבורה G היא חבורת התמורות של \mathbb{N} עם תומך סופי (התומך של תמורה הוא המספרים שהיא מזיזה. ב- S_n כל התמורות הן עם תומך סופי), והחבורה H היא חבורת התמורות הזוגיות של \mathbb{N} עם תומך סופי. כעת אפשר להגדיר שיכון $\varphi : G \rightarrow H$ לפי $\varphi(\sigma) = (12)^{(\text{sign}(\sigma)-1)/2} \rho \sigma \rho^{-1}$ כאשר $\rho(i) = i + 2$.

בדרך אחרת יש להראות כי השיכונים בסעיף הקודם תואמים, כלומר $\phi_{n+1}(\sigma) = \phi_n(\sigma)$ לכל $n \geq 5$ ולכל $\sigma \in S_n$, וכך לבנות שיכון $\varphi : G \rightarrow H$.

ג. הראו כי H משוכנת בתוך G .

ד. הוכיחו כי החבורות G ו- H אינן איזומורפיות. רמז: אחת פשוטה והשנייה לא.

שאלה 9 (אתגר רשות). תהי G חבורה סופית, ויהי α אוטומורפיזם של G השולח יותר משלושת רבעי G להופכי שלהם. כלומר

$$|\{x : \alpha(x) = x^{-1}\}| > \frac{3|G|}{4}$$

הוכיחו כי $\alpha(x) = x^{-1}$ לכל $x \in G$.

בהצלחה!