חישוב נפחים בעזרת משפט הדיברגנץ

תזכורת: יהי V גוף כך שהשפה שלו, $S=\partial V$ היא משטח סגור בעל נורמל יחידה חיצוני N. אם השדה F גזיר ברציפות ב־V אז

$$\int_S \langle F, N\rangle \, dS = \int_V \mathrm{div} F dV. \tag{1}$$

מסקנה: במרחב $\mathbb{R}^3$, אם נסמן $N=(N_x,N_y,N_z)$ ונבחר $F=x, F=y$ או $F=z$ בנוסחא (1) נקבל את שלושת הנוסחאות הבאות לחישוב הנפח של V:

$$\mathrm{vol}(V) \underset{(2)}{=} \int_S x\cdot N_x dS \underset{(3)}{=} \int_S y\cdot N_y dS \underset{(4)}{=} \int_S z\cdot N_z dS.$$

לכן כאשר נרצה לחשב נפח של גוף מסוים V בעזרת משפט הדיברגנץ נשתמש באחת מהנוסחאות $(2),(3)$ או (4) בצורה כזו שחישוב האינטגרל יהיה כמה שיותר פשוט.

דוגמא: חשבו את הנפח של הטורוס V ב־$\mathbb{R}^3$ הסימטרי ביחס לציר ה־Z ובעל רדיוס פנימי 1 ורדיוס חיצוני 3.

פתרון: קודם נעשה פרמטריזציה לשפה $S=\partial V$ של הטורוס V. מהנתונים ש־V סימטרי ביחס לציר ה־Z ובעל רדיוס פנימי 1 ורדיוס חיצוני 3 נובע שלמעשה S הוא סיבוב של המעגל

$$C : (2+\cos\theta, 0, \sin\theta), \theta\in[-\pi,\pi)$$

סביב ציר ה־Z. לכן ל־S יש את הפרמטריזציה

$$\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2+\cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+\cos\theta)\cos\psi \\ (2+\cos\theta)\sin\psi \\ \sin\theta \end{pmatrix},$$

כאשר $(\theta,\psi)\in[-\pi,\pi)\times[-\pi,\pi)$. כעת נחשב את הנורמל ל־$S$ לפי הנוסחא שלמדנו בשיעור 6:

$$n = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin\theta\cos\psi & -\sin\theta\sin\psi & \cos\theta \\ -(2+\cos\theta)\sin\psi & (2+\cos\theta)\cos\psi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\left((2+\cos\theta)\cos\theta\cos\psi, (2+\cos\theta)\cos\theta\sin\psi, (2+\cos\theta)\sin\theta\right).$$

כדי שהנורמל יהיה חיצוני נבחר את $-n$ במקום n. יש הרבה דרכים להראות ש־$-n$ הוא הנורמל החיצוני, אחת הדרכים לראות זאת היא להציב $\theta = 0$ בפרמטריזציה ל־S, במקרה זה נקבל את המעגל

$$\psi \mapsto (3\cos\psi, 3\sin\psi, 0), \psi \in [-\pi, \pi).$$

כמו כן, עבור $\theta = 0$ לנורמל $-n$ יש את הצורה

$$-n(0,\psi) = (3\cos\psi, 3\sin\psi, 0)$$

ואכן אנו יודעים שנורמל למעגל עם מרכז בראשית בנקודה מסוימת חייב להיות פרופורציונאלי לאותה נקודה. כעת נשים לב שהנוסחא הפשוטה ביותר לחישוב הנפח של V עם הפרמטריזציות שמצאנו ל־S ולנורמל $-n$ היא נוסחא (4). לכן אם נשתמש בנוסחא (4) לחישוב הנפח של הטורוס V נקבל

$$\mathrm{vol}(V) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (2+\cos\theta)\sin^2\theta d\theta d\psi$$

$$= 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} (2+\cos\theta)\sin^2\theta d\theta = \pi \int_{-\pi}^{\pi} (2+\cos\theta)(1-\cos(2\theta)) d\theta$$

$$= \pi \int_{-\pi}^{\pi} (2 - 2\cos(2\theta) + \cos\theta - \cos\theta\cos(2\theta)) d\theta$$

$$= \pi \int_{-\pi}^{\pi} \left(2 - 2\cos(2\theta) + \cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\cos(3\theta)\right) d\theta$$

$$= \pi \left(2\theta - \sin(2\theta) + \sin\theta - \frac{1}{2}\sin\theta - \frac{1}{6}\sin(3\theta)\right)\Bigg|_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} = 4\pi^2.$$

<u>דוגמא:</u> חשבו את הנפח של הגוף V המתקבל מחיתוך של שני הגלילים

$$H_1 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1\}, H_2 = \{(x,y,z) : y^2+z^2 \le 1\}.$$

<u>פתרון:</u> במקרה זה יהיה נח, כפי שנסביר בהמשך, לחשב את הנפח של V לפי נוסחאות (2) או (4). אם נשתמש בנוסחא (4) לחישוב הנפח נקבל ש־

$$\mathrm{vol}(V) = \int_S z \cdot N_z dS.$$

כעת נשים לב שאת השפה S של V ניתן לרשום כ־

$$S = (\partial H_1 \cap H_2) \cup (H_1 \cap \partial H_2).$$

לכן נקבל ש־

$$\text{vol}(V) = \int_{\partial H_1 \cap H_2} z \cdot N_z dS + \int_{H_1 \cap \partial H_2} z \cdot N_z dS. \tag{2}$$

כעת נשים לב שכיוון שהמשוואה של הגליל H_1 לא כוללת את המשתנה z נובע שהנורמל n ל־∂H_1 הוא מהצורה $n = (n_1, n_2, 0)$ ובפרט זה יהיה נכון עבור הנורמל של $\partial H_1 \cap H_2$ (כי הוא חלק של המשטח ∂H_1). לכן $N_z = 0$ על המשטח $\partial H_1 \cap H_2$ ולכן האינטגרל הראשון במשוואה (2) מתאפס (אם היינו בוחרים את נוסחא (2) לחישוב השטח היינו מקבלים שהאינטגרל השני מתאפס).

כעת נחשב את האינטגרל השני במשוואה (2). נעשה פרמטריזציה ל־$H_1 \cap \partial H_2$ באופן הבא: ל־H_1 יש את הפרמטריזציה

$$H_1 : (r\cos\theta, r\sin\theta, t), (\theta, r, t) \in [-\pi, \pi) \times [0, 1] \times \mathbb{R}.$$

כמו כן, כיוון שעל ∂H_2 מתקיים $y^2 + z^2 = 1$ נקבל ש־

$$r^2 \sin^2\theta + t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm\left(1 - r^2\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}.$$

אם נניח ש־$t \geq 0$ אז נקבל ש־$t = \left(1 - r^2\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}$. כיוון שהמשטח $H_1 \cup \partial H_2$ סימטרי ביחס לציר ה־Z נוכל להתעלם מהמקרה ש־$t \leq 0$ ופשוט נכפיל את התוצאה שנקבל ב־2. לכן לחלק העליון Γ של $H_1 \cup \partial H_2$ יש את הפרמטריזציה

$$\Gamma : \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \left(1 - r^2\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}\right), (\theta, r) \in [-\pi, \pi) \times [0, 1].$$

כעת נחשב את הנורמל ל־Γ לפי הנוסחא שלמדנו בשיעור 6:

$$n = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & -\frac{r\sin^2\theta}{\sqrt{1-r^2\sin^2\theta}} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & -\frac{r^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1-r^2\sin^2\theta}} \end{vmatrix} = \left(0, \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{1-r^2\sin^2\theta}}, r\right)$$

וקל לבדוק שזה נורמל חיצוני. כיוון שעל המשטח Γ מתקיים $z = \left(1 - r^2\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}$ נקבל ש־

$$\text{vol}(V) = 2\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 r\left(1 - r^2\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}} dr d\theta$$

$$= -\frac{2}{3}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sin^2\theta}\left(1 - r^2\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{r=0}^{r=1} d\theta = \frac{2}{3}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left(1 - |\cos\theta|^3\right)d\theta}{\sin^2\theta}.$$

כעת נשים לב שהפונקציה בתוך האינטגרל האחרון זוגית ולכן ניתן להחליף את קטע האינטגרציה מ־$[-\pi, \pi]$ ל־$[0, \pi]$ ולהכפיל ב־2. כמו כן, כיוון שהפונקציה

היא מחזורית π ניתן להחליף את קטע האינטגרציה ל־$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ושוב כיוון שהפונקציה זוגית ניתן להחליף את קטע האינטגרציה ל־$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ולהכפיל ב־2. לכן נקבל ש־

$$\mathrm{vol}(V)=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1-\cos^3\theta\right)d\theta}{\sin^2\theta}=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1-\left(1-\sin^2\theta\right)\cos\theta\right)d\theta}{\sin^2\theta}$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\theta+\frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)d\theta=\frac{8}{3}\left(\sin\theta+\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{16}{3}.$$

אוריינטציה עבור שפה של משטחים ב־$\mathbb{R}^3$

<u>הגדרה</u>: יהי M משטח אוריינטבילי ב־$\mathbb{R}^3$ עם שפה סגורה $\Gamma=\partial M$. נניח ש־$n=n(x)$ הוא נורמל רציף המוגדר לכל $x\in M$ כך ש־n נותן אוריינטציה ל־M ונניח ש־

$$\gamma:[a,b]\to\Gamma$$

היא פרמטריזציה חלקה ופשוטה של Γ. אז נאמר, באופן אינטואיטיבי, שהעקומה γ מכוונת בכיוון חיובי ביחס לנורמל n אם כאשר נעמוד בכיוון הנורמל n על העקומה Γ ונילך בכיוון של הפרמטריזציה γ, נראה את המשטח M מצד שמאל.

<u>דוגמא</u>: נתון המשטח

$$M=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=4,z\geq y+2\}$$

ונניח ש־n הוא נורמל חיצוני כלשהו של M. מצאו פרמטריזציה לשפה $\Gamma=\partial M$ שתהיה מכוונת בכיוון חיובי ביחס לנורמל n.

<u>פתרון</u>: מהגדרת המשטח M נובע שהשפה של Γ נתונה לפי

$$\Gamma=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=4,z=y+2\}.$$

ולכן ההיטל של Γ על מישור ה־XY נתון לפי

$$x^2+2y^2+4y=0\Rightarrow x^2+2(y+1)^2=2.$$

לכן נקבל את הפרמטריזציה הבאה ל־Γ:

$$\gamma(t)=\left(\sqrt{2}\cos(t),-1+\sin(t),1+\sin(t)\right),t\in[-\pi,\pi).$$

כעת כדי לבדוק אם הפרמטריזציה γ מכוונת את Γ בכיוון החיובי ביחס לנורמל החיצוני n, נשים לב שאם נילך על Γ ונראה את המשטח M מצד שמאל אז המשיק בנקודה התחתונה של Γ (כלומר בנקודה $(0,-2,0)$) חייב להיות מקביל לציר ה־x בכיוון החיובי. הנקודה $(0,-2,0)$ מתקבלת כאשר $t=-\frac{\pi}{2}$, נבדוק מהוא כיוון הנגזרת של γ בנקודה זו

$$\gamma'(t)=\left(-\sqrt{2}\sin(t),\cos(t),\cos(t)\right),\Rightarrow\gamma'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\left(\sqrt{2},0,0\right).$$

לכן γ אכן מכוונת את Γ בכיוון החיובי.

<u>דוגמא</u>: יהי M החלק של המשטח $z=1-x^2$ הנמצא בין המישורים $y=0$ ו־$z=y$ ומקיים $z\geq 0$. מצאו פרמטריזציה לשפה Γ של M שתכוון אותה בכיוון החיובי ביחס לנורמל החיצוני של M.

<u>פתרון</u>: השפה Γ מורכבת משתי עקומות Γ_1 ו־Γ_2 כאשר

$$\Gamma_1=\{(x,y,z):z=1-x^2,y=0,z\geq 0\},$$
$$\Gamma_2=\{(x,y,z):z=1-x^2,z=y,z\geq 0\}.$$

לעקומה Γ_1 נוכל לעשות את הפרמטריזציה

$$\gamma_1=\left(t,0,1-t^2\right),t\in[-1,1].$$

כדי לבדוק אם γ_1 מכוונת את Γ_1 בכיוון החיובי ביחס לנורמל החיצוני n, נשים לב שאם נעמוד בכיוון של הנורמל החיצוני ונלך על Γ_1 מהנקודה $(-1,0,0)$ לנקודה $(1,0,0)$ אז נראה את המשטח M מצד שמאל. לכן על העקומה γ_1 להתחיל מהנקודה $(-1,0,0)$ ולהסתיים ב־$(1,0,0)$ ואכן

$$\gamma_1(-1)=(-1,0,0),\gamma_1(1)=(1,0,0).$$

לעקומה Γ_2 נוכל לעשות את הפרמטריזציה

$$\gamma_2=\left(t,1-t^2,1-t^2\right),t\in[-1,1].$$

כעת אם נלך על העקומה Γ_2 בכיוון הנורמל החיצוני n ונרצה לראות את המשטח M מצד שמאל נצטרך ללכת מהנקודה $(1,0,0)$ לנקודה $(-1,0,0)$, אבל הפרמטריזציה γ_2 מקיימת

$$\gamma_2(-1)=(-1,0,0),\gamma_2(1)=(1,0,0).$$

לכן "נהפוך" את הכיוון של γ_2 ע"י הצבה $t=-s$ ונקבל את הפרמטריזציה החדשה

$$\widetilde{\gamma}_2(s)=\gamma_2(-s)=\left(-s,1-s^2,1-s^2\right),s\in[-1,1].$$

לכן העקומה $\widetilde{\gamma}_2$ תכוון את Γ_2 בכיוון החיובי ביחס לנורמל החיצוני.