

תרגיל בית 6 בשדות ותורת גלואה 88-311 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1 (חימום). תהי L/F הרחבת שדות ספרבילית, ויהי K שדה ביניים. הוכיחו כי גם K/F וגם L/K ספרביליות.

שאלה 2. קבעו האם הפולינומים הבאים ספרביליים.

א. $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ מעל \mathbb{Q} .

ב. $x^5 - 3x^3 - 2x^2 + 2x + 2$ מעל \mathbb{Q} .

ג. $x^{10} + x^5 + 3$ מעל \mathbb{F}_5 .

ד. $x^p - x + a$ מעל שדה F ממאפיין $p > 0$ (שפגשנו כבר בכיתה).

שאלה 3. יהיו F, K שדות, יהי $\varphi : F \hookrightarrow K$ שיכון, ויהי $f \in F[x]$. הוכיחו:

א. $\varphi(f') = (\varphi(f))'$.

ב. f ספרבילי מעל F אם ורק אם $\varphi(f)$ ספרבילי מעל K .
(הדרכה: היעזרו בקריטריון לבדיקת ספרביליות על ידי הנגזרת.)

שאלה 4.

א. מצאו את כל ההמשכות של $\mathbb{Q} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ לשיכון $\text{id} : \mathbb{Q} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ ושיכון $\psi : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$.

ב. בחרו את אחד השיכונים שמצאתם בסעיף א', ומצאו את כל ההמשכות שלו לשיכון $\hat{\psi} : \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$.

שאלה 5. תהי L/F הרחבת שדות סופית (כלומר ממימד סופי), ויהי K שדה ביניים. נניח שהרחבות L/K ו- K/F ספרביליות. הוכיחו ש- L/F ספרבילית.
(הדרכה: בכמה דרכים ניתן להמשיך את $\text{id} : F \hookrightarrow \overline{F}$ ל- $L \hookrightarrow \overline{F}$?)

שאלה 6 (רשות). יהי $f = x^5 + x^3 + x + 1 \in F[x]$. הוכיחו כי f ספרבילי אם ורק אם $\text{char } F \neq 11, 37$.

שאלה 7 (רשות). תהי L/F הרחבה אלגברית (כלומר כל איבר ב- L אלגברית מעל F), שהיא לא בהכרח סופית. יהי $F \subseteq K \subseteq L$ שדה ביניים.