

מד"ר - תרגול 8

21 בדצמבר 2013

מערכת משוואות לא הומוגנית עם מקדמים קבועים

$$\vec{X}' = A\vec{x} + g(t)$$

$$\vec{X}' = A\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{דוגמה 1:}$$

פתרון: נמצא פתרון הומוגני ופתרון פרטי. עבור הומוגני: $\vec{X}' = A\vec{x}$. נמצא ע"ע ווע"מתאימים. נקבל:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1, & v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 &= -1, & v_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \lambda_3 &= 4, & v_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

הפתרון ההומוגני הוא :

$$X_n(t) = \alpha e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

המשוואות הדרושות לפי ווריאציות המקדמים הן הבאות כי סדר המשוואה הוא 1 ולכן גוזרים רק את הקבועים:

$$\begin{cases} \alpha t e^{4t} + \beta t e^t + \delta t e^{-t} = e^t \\ \alpha t e^{4t} - 2\beta t e^t + 0 = 0 \\ \alpha t e^{4t} + \beta t e^t - \delta t e^{-t} = e^t \end{cases}$$

לאחר פתרון מערכת המשוואות נקבל:

$$\begin{aligned}\delta &= 0 \\ \beta &= \frac{1}{3} \\ \alpha &= 2\beta t e^{-3t}\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}\delta &= c_1 \\ \beta &= \frac{1}{3}t + c_2 \\ \alpha &= -\frac{2}{9}e^{-3t} + c_3\end{aligned}$$

לכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = \left(-\frac{2}{9}e^{-3t} + c_3\right) e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{3}t + c_2\right) e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מיון נקודות סינגולריות

$$p(x)y'' + q(x)y' + R(x)y = 0$$

נבדוק את הגבולות:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \cdot \frac{q(x)}{p(x)} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 \cdot \frac{R(x)}{p(x)}\end{aligned}$$

אם שני הגבולות הנ"ל ספיים נאמר שהנקודה x_0 סינגולרית רגולרית. כשנקודה היא סינגולרית רגולרית אפשר לפתח סביבה טור טיילור שיהיה פתרון של המשוואה.

דוגמה 2: מיון נקודות סינגולריות רגולריות $(x \sin x)y'' + \cos(x)y' + e^x \cdot y = 0$

פתרון:

$$\begin{aligned}p(x) &= x \sin x \\ q(x) &= \cos x \\ R(x) &= e^x\end{aligned}$$

אז x_0 נקבע ע"י המשוואה:

$$\begin{aligned}p(x_0) &= 0 \\ x_0 \sin x_0 &= 0 \\ x_0 &\in \pi\mathbb{Z}\end{aligned}$$

נחשב את הגבולות עבור $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cot x = \infty$$

הגבול לא קיים לכן הנק' $x_0 = 0$ היא סינגולרית אי רגולרית. נבדוק עבור $x_k = \pi k$, $k \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \pi k} (x - \pi k) \cdot \frac{\cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi k} \underbrace{\frac{(x - \pi k)}{\sin x}}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{\cos x}{x} = \pm \frac{1}{\pi k}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi k} (x - \pi k)^2 \frac{e^x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi k} \frac{(x - \pi k)}{\sin x} \cdot \frac{(x - \pi k)e^x}{x} = 0$$

לכן הנקודות $x_k = \pi k$ עבור $k \neq 0$ הן סינגולריות רגולריות.

שיטת פרובניוס

משתמשים בטורי טיילור כדי למצוא פתרון למשוואה מסדר שני. תהי x_0 נקודה סינגולרית רגולרית של המשוואה $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ אזי למשוואה ישנו פתרון מהצורה

$$y = (x - x_0)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (x - x_0)^n$$

כאשר הפתרונות λ_1, λ_2 מתקבלים מהמשוואה הריבועית עבור a_0 .

מקרה א'

נניח λ_1, λ_2 שורשים המקיימים את התנאים הבאים:

$$1. \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$2. \lambda_1 > \lambda_2$$

$$3. \lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$$

אז הפתרונות הם מהצורה:

$$y_1(x) = (x - x_0)^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$y_2(x) = (x - x_0)^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

כלומר $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

דוגמה 3: העזר בטור טיילור סביב $x = 0$ כדי לפתור את המד"ר הבאה:

$$2x^2 y'' + zx(x+1)y' - 3y = 0$$

פתרון: נשים לב כי יש לבדוק נקודות סינגולריות. נסמן:

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^2 \\ q(x) &= 7x(x+1) \\ R(x) &= -3 \end{aligned}$$

קל לראות ש $x = 0$ היא נקודה סינגולרית.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{7x(x+1)}{2x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7(x+1)}{2} = \frac{7}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{-3}{2x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3}{2} = -1.5 \end{aligned}$$

לכן $x = 0$ סינגולרית רגולרית. ידוע כי קיים פתרון מהצורה $y = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. נחפש λ מתאימה ע"י הצבה במשוואה:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda} \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\lambda) x^{n+\lambda-1} \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) x^{n+\lambda-2} \end{aligned}$$

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) a_n x^{n+\lambda} + 7(x+1) \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) a_n x^{n+\lambda} - 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda} = 0$$

$$2a_0\lambda(\lambda-1) + 7a_0\lambda - 3a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n [a_n \cdot 2(\lambda+n)(\lambda+n-1) + 7(\lambda+n) - 3] + 7(n+\lambda-1)a_{n-1}] x^{n+\lambda} = 0$$

מהשוואות מקדמים נקבל:

$$\begin{aligned} 2a_0\lambda(\lambda-1) + 7a_0\lambda - 3a_0 &= 0 \\ a_0(\lambda^2 - 2\lambda + 7\lambda - 3) &= 0 \\ 2\lambda^2 + 5\lambda - 3 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= 0.5, -3 \end{aligned}$$

נבודד את a_n ונקבל:

$$a_n = -\frac{7(\lambda+n-1)a_{n-1}}{2(\lambda+n)(\lambda+n-1) + 7(\lambda+n) - 3}$$

נציב $\lambda_2 = -3$

$$b_n = -\frac{7(n-4)b_{n-1}}{2(n-3)(n-4) + 7(n-3) - 3} = -\frac{7(n-4)b_{n-1}}{2n^2 - 14n + 24 + 7n - 21 - 3} = -\frac{7(n-4)b_{n-1}}{2n^2 - 7n}$$

$$b_n = (-1)^n \cdot b_0 \cdot \frac{7^n (n-4)(n-5)(n-6) \dots 1 \cdot (-3)(-2)(-1) \cdot 0}{\dots} = \begin{cases} 0 & n \geq 4 \\ (*) & n < 4 \end{cases}$$

(*)

$$b_1 = -\frac{7(-3)b_0}{2-7} = -\frac{21}{5}b_0 = \frac{-7}{5} \cdot 3b_0$$

$$b_2 = -\frac{7(-2)}{8-14} \left(-\frac{21}{5}b_0\right) = \frac{49}{5} \cdot 3b_0$$

$$b_3 = -\frac{7(-1)}{18-21} \left(\frac{49}{5} \cdot 3b_0\right) = -\frac{343}{15} \cdot b_0$$

נציב $\lambda_1 = 0.5$

$$a_n = -\frac{7 \cdot (n-0.5)a_{n-1}}{2(n+0.5)(n-0.5) + 7(n+0.5) - 3} = -\frac{\frac{7}{2}(n-1)a_{n-1}}{0.5(2n+1)(2n-1) + \frac{7}{2}(2n+1) - 3} = -\frac{7(2n-1)}{4n^2-1+14n-3}$$

$$a_n = (-1)^n a_0 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^n \cdot \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{n!(2n+7)(2n+5)(2n+3)\cdots 9}$$

לכן הפתרון יהיה:

$$y = a_0 y_1 + b_0 y_2$$

כאשר

$$y_1 = x^{0.5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{7}{2}\right)^n \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{n!(2n+7)(2n+5)(2n+3)\cdots 9} x^n$$

$$y_2 = x^{-3} \left(1 - \frac{21}{5}x + \frac{49}{5}x^2 - \frac{343}{15}x^3\right)$$