ב"א אנליזה 1 תשעט מועד ב

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)\cdot\cos(3x)\cdot\sin(4x)}{1-\cos(5x)}$

פתרון: נציג את הגבול כמכפלה של גבלות ידועים

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)\cdot\cos(3x)\cdot\sin(4x)}{1-\cos(5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{\sin(4x)}{4x}\cdot\frac{(5x)^2}{1-\cos(x)}\cdot\cos(3x)\cdot\frac{2x\cdot 4x}{(5x)^2}$$
$$=1\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{8}{5}=\frac{16}{5}$$

(ב) $\lim\limits_{x\to(-\infty)}\sqrt{x^2+2x+1}+x$

פתרון: כיוון ש $x\to-\infty$ אפשר להסתכל רק על xים שקטנים מ -1 ולכן

$$\sqrt{x^2+2x+1}=\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|\underbrace{=}_{x<-1}-(x+1)$$

ואז

$$\lim_{x\to(-\infty)}\sqrt{x^2+2x+1}+x=\lim_{x\to(-\infty)}-(x+1)+x=-1$$

(ג) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{e^n}$

פתרון: נשתמש בכלל המנה, נגדיר $a_n=\frac{n!}{e^n}$ ואז

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=a_{n+1}\cdot\frac{1}{a_n}=\frac{(n+1)!}{e^{n+1}}\cdot\frac{e^n}{n!}=\frac{e^n}{e^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}=\frac{1}{e}\cdot(n+1)\to\infty$$

ולכן $\lim a_n=\infty$.

2. נביט בפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}x^2+a & x\geq 0\\ bx+c & x<0\end{cases}$$

(א) לאילו ערכי a,b,c הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x=0$?

פתרון: על מנת שהפונקציה תהיה רציפה ב $x=0$ צריך להתקיים

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$

שזה שקול לכך ש

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

כלומר

$$\lim_{x\to 0^+} \left(x^2+a\right) = a = \lim_{x\to 0^-} (bx+c)$$

כיוון שהשיוויון השמאלי תמיד מתקיים נבדוק את מתי השיוויון הימני מתקיים: לכל a, b, c, מתקיים

$$\lim_{x\to 0^-} (bx+c) = c$$

ולכן רק עבור $c = a$ מתקיים השיוויון הדרוש, ללא תלות בערך של b. כלומר הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x^2+a & x \geq 0 \\ bx+a & x < 0 \end{cases}$$

רציפה ב $x = 0$, לכל ערך של a, b

(ב) לאילו ערכי a, b, c הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x = 0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלו?
פתרון: פונקציה שגזירה בנקודה, רציפה בה לכן נבדוק גזירות ב $x = 0$ לפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x^2+a & x \geq 0 \\ bx+a & x < 0 \end{cases}$$

(לכל a, b, כמו שראינו בסעיף קודם). לפי הגדרה, צריך לחשב את הגבול

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

שזה שקול לכך ש

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

וערך זה שווה ל $f'(0)$. נחשב:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{bx+a-a}{x} = b$$

ומצד שני

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+a-a}{x} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

ולכן שני הגבולות שווים אם ורק אם $b = 0$ וזה המקרה היחיד בו f גזירה ב $x = 0$ והנגזרת במקרה זה שווה $f'(0) = 0$.

3. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + a_n^2$ לכל n טבעי, וכן נתון כי $a_1 = 1$.

(א) הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $a_1 \geq 1$.
פתרון:
נוכיח זאת באינדוקציה:

- בסיס $n = 1$: נתון ש $a_1 = 1$ ואכן הוא גדול שווה ל 1.

- צעד - נניח נכונות עבור n, כלומר $1 \le a_n$. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר $1 \le a_{n+1}$. לפי הגדרת הסדרה, נקבל:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + a_n^2 \ge \frac{1}{n} + 1^2 \ge 1$$

וקיבלנו ש $a_{n+1} \ge 1$ כנדרש.

(ב) חשבו את גבול הסדרה $\lim_{n\to\infty} a_n$.

פתרון: לפי הגדרת הסדרה, נקבל: $a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + a_n^2$ ולכן

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{n} + a_n^2 - a_n = \frac{a_n}{n} + a_n\left(a_n - 1\right) \ge \frac{1}{n} + 1 \cdot 0 > 0$$

ולכן לכל n מתקיים $a_{n+1} > a_n$, כלומר הסדרה עולה. **אם** הסדרה חסומה היא מתכנסת לגבול סופי L, כלומר $a_n \to L$ ואז גם $a_{n+1} \to L$ ואז לפי הגדרת הסדרה

$$L \leftarrow a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + a_n^2 \to 0 + L^2$$

ונקבל ש $L = L^2$ כלומר $L(L-1) = 0$שהפתרונות שלה הן $0, 1$. האפשרות ש $L = 0$ נשללת כי הסדרה עולה ולכן $a_n \ge a_1 = 1$ ובפרט $\lim_{n\to\infty} a_n \ge 1$. בנוסף $a_2 = \frac{a_1}{1} + a_1^2 = 2$ ובגלל שהסדרה עולה $a_n \ge a_2 = 2$ ובפרט $\lim_{n\to\infty} a_n \ge 2$ ולכן גם האפשרות ש $L = 1$ נשללת. מכאן שהסדרה אינה חסומה ולכן $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

4. מצאו לכל ערך $a \in \mathbb{R}$ כמה פתרונות יש למשוואה $x^2 - 2\ln(x) = a$ (חלקו למקרים).

פתרון: נגדיר פונקציה

$$f(x) = x^2 - 2\ln(x) - a$$

שמוגדרת רק עבור $x > 0$ (בגלל ln) ונשאל שאלה שקולה: לכל ערך של a, כמה שורשים יש ל $f(x)$. נגזור

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 2\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

ולכן $f'(x) = 0$ אמ"מ $\left(x - \frac{1}{x}\right) = 0$ אמ"מ $x = \frac{1}{x}$ או $x^2 = 1$ כלומר רק עבור $x = \pm 1$ ואינה מוגדרת עבור $x = 0$. מהטבלה

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f'(x)$	UD	$-$	0	$+$

נסיק כי f יורדת ממש ב $(0,1)$ ועולה בקרן $(1,\infty)$ ולכן בקטע/קרן הנ"ל f יכולה להיחתך לכל היותר פעם אחת בלבד עם ציר x (כלומר שורש אחד לכל היותר) וגם $x = 1$ נקודת מינימום.

בנוסף: מתקיים כי

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 - 2\ln(x) - a = \{0 - 2\left(-\infty\right) - a\} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 - 2\ln(x) - a = \lim_{x\to\infty} x^2\left(1 - 2\frac{\ln(x)}{x^2} - \frac{a}{x^2}\right) = \{\infty \cdot (1 - 0 - 0)\} = \infty$$

כאשר הגבול באינסוף חושב עם הגבול

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=0$$

ולכן קיימים $0<c<1$ ו $1<d$ כך ש $f(c)>0, f(d)>0$. כעת, נזכר ש $x=1$ נקודת מינימום והערך שלה הוא $f(1)=1-a$ ולכן:

- ועבמידה ו $1-a<0$ (כלומר $1<a$) נקבל ש $f(1)<0$ בקטעים $[c,1]$ וב $[1,d]$ הפונקציה מחליפה סימן. מכיוון שהיא רציפה בקטעים סגורים אלו, לפי משפט ערך הביניים היא מתאפסת שמה - כלומר קיים לה בכל קטע שורש והשורש לא מתקבל ב 1 ולכן אלו שני שורשים שונים. מכיוון שבכל קטע יש לה לכל היותר שורש אחד נסיק שיש לה בדיוק שורש אחד בכל קטע ולכן במקרה זה ($1<a$) יהיו 2 פתרונות בדיוק.
- במידה ו $1-a=0$ (כלומר $a=1$) נקבל כי $f(1)=0$ וזוהי הנקודה היחידה בה f מתאפסת (מאותו נימוק: בקטעים $[c,1]$ וב $[1,d]$ הפונקציה מתאפסת לפחות פעם אחת ולכל היותר פעם אחת ולכן הנקודה שהיא מתאפסת זהה בשני הקטעים וזוהי הנקודה 1).
- במידה ו $1-a>0$ (כלומר $1>a$) נקבל ש $f(1)>0$ ו מכיוון ש $f(1)$ ערך מינמאלי נסיק ש $f(x)\geq f(1)>0$ ולכן גרף הפונקציה כולו מעל לציר x ולכן במקרה זה לא יהיו שורשים.

5. תהיא f פונקציה שגזירה בכל $\mathbb{R}$.

(א) הוכיחו שאם $f=-f'$ אזי הפונקציה $e^x f(x)$ קבועה.
פתרון: נגזור את $g(x)=e^x f(x)$:

$$g'(x)=e^x f(x)+f'(x)\cdot e^x=e^x\left(f(x)+f'(x)\right)=0$$

בגלל הנתון ש $f(x)=-f'(x)$. כיוון ש $g'(x)=0$ לכל x נקבל ש $g(x)$ פונקציה קבועה כמו שרצינו.

(ב) הוכיחו/הפריכו: $f\left(f(x)\right)$ פונקציה עולה.
פתרון: הפרכה: $f(x)=x^2$ גזירה בכל הממשיים ו $f\left(f(x)\right)=x^4$ שאינה עולה (היא יורדת בכל $(-\infty,0)$).