

פיסיקה למתמטיקאים 88-320

תרגיל 6

1. הוכיחו כי אופרטור U משמר נורמה במרחב הילברט \mathcal{H} אם הוא יוניטרי, כלומר $U^\dagger = U^{-1} \iff \|U\varphi\| = \|\varphi\|, \forall \varphi \in \mathcal{H}$ (הדרכה: על מנת להוכיח ש U יוניטרי התבוננו בוקטור $|\varphi\rangle + \lambda|\chi\rangle$ כאשר $|\varphi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{H}$ ו λ סקלר מרוכב. בדקו את המכפלה הפנימית המתאימה עבור $\lambda = 1$ ו $\lambda = i$).

כוון א: נניח ש U יוניטרי. אזי $\langle \varphi | U^\dagger U \varphi \rangle = \langle \varphi | U^{-1} U \varphi \rangle = \langle \varphi | \varphi \rangle$ כלומר U משמר נורמה

כוון ב: נניח ש U משמר נורמה. צ"ל $\langle U\varphi | U\chi \rangle = \langle \varphi | \chi \rangle$ לכל $|\varphi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{H}$. ניקח $|\varphi\rangle + \lambda|\chi\rangle \in \mathcal{H}$ כאשר $\lambda \in \mathbb{C}$ ונחשב

$$\langle U(\varphi + \lambda^*\chi) | U(\varphi + \lambda\chi) \rangle = (\langle U\varphi | + \lambda^* \langle U\chi |) (|U\varphi\rangle + \lambda|U\chi\rangle) =$$

$$\langle U\varphi | U\varphi \rangle + |\lambda|^2 \langle U\chi | U\chi \rangle + 2\text{Re}(\lambda \langle U\varphi | U\chi \rangle) =$$

$$(\langle \varphi | + \lambda^* \langle \chi |) (|\varphi\rangle + \lambda|\chi\rangle) = \langle \varphi | \varphi \rangle + |\lambda|^2 \langle \chi | \chi \rangle + 2\text{Re}(\lambda \langle \varphi | \chi \rangle)$$

ולכן

$$\text{Re}(\lambda \langle U\varphi | U\chi \rangle) = \text{Re}(\lambda \langle \varphi | \chi \rangle)$$

כעת אם ניקח $\lambda = 1$ נקבל $\text{Re}(\langle U\varphi | U\chi \rangle) = \text{Re}(\langle \varphi | \chi \rangle)$ ועבור $\lambda = i$ נקבל $\text{Im}(\langle U\varphi | U\chi \rangle) = \text{Im}(\langle \varphi | \chi \rangle)$ ולכן $\langle U\varphi | U\chi \rangle = \langle \varphi | \chi \rangle$

2. הוכיחו:

(א) את משפט ארנפסט (Ehrenfest): יהי $A(t)$ אופרטור הרמיטי (באופן כללי תלוי מפורשות בזמן), H המילטוניאן, ו $|\psi(t)\rangle$ מקיימת את משוואת שרדינגר התלויה בזמן

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H|\psi\rangle$$

אזי

$$\frac{d\langle A \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [H, A] \rangle + \left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle$$

$$\frac{d\langle A \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \langle \psi | A | \psi \rangle = \langle \dot{\psi} | A | \psi \rangle + \langle \psi | A | \dot{\psi} \rangle + \langle \psi | \dot{A} | \psi \rangle =$$

$$\frac{i}{\hbar} \langle H\psi | A | \psi \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle \psi | A | H\psi \rangle + \langle \psi | \dot{A} | \psi \rangle = \frac{i}{\hbar} (\langle \psi | HA | \psi \rangle - \langle \psi | AH | \psi \rangle) + \langle \psi | \dot{A} | \psi \rangle =$$

$$\frac{i}{\hbar} \langle \psi | [H, A] | \psi \rangle + \langle \psi | \dot{A} | \psi \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, A] \rangle + \left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle$$

(ב) ע"י שימוש במשפט ארנפסט, כי מרכז המסה של פונקצית הגל של אוסילטור הרמוני עם פוטנציאל $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ מקיים את משוואת התנועה הקלאסית

$$\frac{d^2\langle x \rangle}{dt^2} + \omega^2 \langle x \rangle = 0$$

ע"י שימוש במשפט ארנפסט ובזהות הקומוטטורים

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [H, x] \rangle = \frac{i}{\hbar} \left\langle \left[\frac{p^2}{2m}, x \right] \right\rangle = \frac{i}{\hbar} \frac{-2i\hbar\langle p \rangle}{2m} = \frac{\langle p \rangle}{m}$$

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [H, p] \rangle = \frac{i}{\hbar} \frac{m\omega^2}{2} \langle [x^2, p] \rangle = \frac{i}{\hbar} \frac{m\omega^2}{2} 2i\hbar\langle x \rangle = -m\omega^2 \langle x \rangle$$

מגזירה נוספת של המשוואה הראשונה והצבה של השניה נקבל

$$\frac{d^2\langle x \rangle}{dt^2} + \omega^2 \langle x \rangle = 0$$

3. פונקצית הגל של חלקיק קוונטי בבור פוטנציאל אינסופי בזמן $t = 0$ היא

$$\psi(x) = cx(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

(א) מהו קבוע הנרמול c ?

מתנאי הנרמול

$$\int_0^1 |\psi(x)|^2 dx = c^2 \int_0^1 x^2(1-x)^2 dx = 1$$

$$c = \sqrt{30} \text{ נקבל}$$

(ב) מהי ההסתברות למצוא את החלקיק בחצי השמאלי של הבור ($0 \leq x \leq \frac{1}{2}$)?

$$|\psi(x)|^2 \text{ סימטרית ביחס ל } x = \frac{1}{2} \text{ ולכן ההסתברות היא } \frac{1}{2}$$

(ג) מהי ההסתברות למצוא את החלקיק במצב העצמי ה- k ($\phi_k = \sqrt{2} \sin \pi k x$)?

עבור אילו ערכי k ההסתברות היא 0?

נסמן $c_k = \langle \phi_k | \psi \rangle$ ונקבל

$$\begin{aligned} Pr(\psi = \phi_k) &= |c_k|^2 = \left| \sqrt{60} \int_0^1 x(1-x) \sin \pi k x dx \right|^2 \\ &= \left(-\frac{2\sqrt{60}}{(\pi k)^3} ((-1)^k - 1) \right)^2 = \begin{cases} \frac{960}{(\pi k)^6}, & k \text{ odd} \\ 0, & k \text{ even} \end{cases} \end{aligned}$$

(ד) מצאו ביטוי לפונקצית הגל כתלות בזמן, $\psi(x, t)$ (ניתן להשאיר בצורת סכום).

$$\psi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} c_k \phi_k(x) = \frac{8\sqrt{30}}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} E_{2k-1} t} \frac{\sin \pi(2k-1)x}{(2k-1)^3}$$

$$E_k = \frac{\hbar^2 \pi^2 k^2}{2m} \text{ כאשר}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ אופרטור המתאר גודל פיזיקלי נתון ע"י}$$

(א) מהם הערכים האפשריים במדידת הגודל הפיזיקלי המתאים לאופרטור A ?

הפולינום האפייני של A הוא $p(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$ עם ע"ע

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 6$$

(ב) אם מצב המערכת נתון ע"י $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, מהם הערכים האפשריים במדידת

A ובאילו הסתברויות הם מתקבלים (שימו לב, הוקטור אינו מנורמל)?

הו"ע המתאימים הם $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ולכן המצב המנורמל $u = \frac{1}{\sqrt{3}}v$ ניתן לכתיבה כ $u = \frac{1}{\sqrt{3}}v_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}v_2$ ונקבל

$$Pr(A' = 2) = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \right|^2 + \left| \sqrt{\frac{2}{3}} \right|^2 = 1$$

(ג) אם מצב המערכת נתון ע"י הוקטור $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, מהם הערכים האפשריים

במדידת A ובאילו הסתברויות הם מתקבלים?

באופן דומה נוכל לרשום $v = \frac{1}{\sqrt{2}}v_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}v_3$ ולכן

$$Pr(A' = 2) = Pr(A' = 6) = \frac{1}{2}$$

(ד) גודל פיזיקלי אחר מתואר ע"י האופרטור $B = \begin{pmatrix} 14 & -4 & -4 \\ -4 & 6 & 4 \\ -4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ אם

מדדנו כרגע את הגודל הפיזיקלי המתאים ל B וקיבלנו שתוצאת המדידה היא 6, מה יתקבל אם נמדוד עכשיו את A ?

הו"ע של B המתאים לע"ע $\lambda = 6$ הוא $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ולכן אם נמדוד את

A לאחר שהמערכת נמצאת במצב זה, נקבל שתוצאת המדידה בודאות 2