

אלגברה מופשטת 4 – תרגיל 5 - פתרון

שאלה 1

יהי $n > 2$ ויהי $\rho_n = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$. נגדיר $a_n = \rho_n + \rho_n^{-1}$ ו- $K = \mathbb{Q}[a_n]$.

- מצאו את הפולינום המינימלי של ρ_n מעל K . [רמז: $a_n \in \mathbb{R}$]
- נניח ש- n ראשוני. מה דרגת הפולינום המינימלי של a_n ? (אין צורך לחשב את הפולינום)
- מצאו את הפולינום המינימלי של a_5 .
- הביעו את ρ_5 בעזרת מספרים רציונליים ושורשים ריבועיים. (העזרו ב-3 ו-1).

פתרון

תשובה ל-1: מתקיים $a_n \rho_n = \rho_n^2 + 1$ ולכן שורש של הפולינום $x^2 - a_n x + 1 \in K[x]$. אם זה לא הפולינום המינימלי של ρ_n מעל K אז $\rho_n \in K \subseteq \mathbb{R}$ (כי $a_n = \rho_n + \bar{\rho}_n \in \mathbb{R}$) וזה בלתי אפשרי כי $\rho_n \notin \mathbb{R}$ עבור $n > 2$. לכן, הפולינום המינימלי של ρ_n מעל K הוא $x^2 - a_n x + 1$.

תשובה ל-2: יהי f הפולינום המינימלי של a_n , אזי $\deg f = [K:\mathbb{Q}] = \frac{[\mathbb{Q}[\rho_n]:\mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}[a_n]:K]} = \frac{n-1}{2}$ (מסעיף 1 נובע ש- $[K:\mathbb{Q}] = 2$), ובכיתה הוכחנו שהפולינום המינימלי של ρ_n עבור n ראשוני הוא ממעלה $(n-1)$.

תשובה ל-3: לפי 2 אנחנו יודעים שהפולינום המינימלי של a_5 הוא ממעלה $\frac{5-1}{2} = 2$. אפשר למצוא אותו על ידי מציאת תלות לינארית (מעל \mathbb{Q}) בין האיברים $1, a_5, a_5^2$ (ניתן להעזר בכך ש- $\{1, \rho_5, \rho_5^2, \rho_5^3\}$ בסיס ל- $\mathbb{Q}[\rho_5]$ מעל \mathbb{Q}). באמת:

$$a_5 = \rho_5 + \rho_5^{-1} = \rho_5 + \rho_5^4 = \rho_5 + (-1 - \rho_5 - \rho_5^2 - \rho_5^3) = -1 - \rho_5^2 - \rho_5^3$$

$$a_5^2 = \rho_5^2 + 2 + \rho_5^{-2} = 2 + \rho_5^2 + \rho_5^3$$

(בשוויון האדום השתמשנו בכך שהפולינום המינימלי של ρ_5 הוא $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$). כעת, קל לראות כי $a_5^2 + a_5 - 1 = 0$ וזה אומר ש- $x^2 + x - 1$ הוא הפולינום המינימלי של a_5 מעל \mathbb{Q} .

תשובה ל-4: לפי סעיף 3 $a_5 \in \left\{\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$. היות ו- $a_5 > 0$ (בדקו!) נובע ש- $a_5 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. לפי סעיף 1,

ρ_5 הוא שורש של הפולינום $x^2 - a_5 x + 1$ ולכן $\rho_5 \in \left\{\frac{a_5 \pm \sqrt{a_5^2 - 4}}{2}\right\}$. היות והחלק הממשי של ρ_5 הוא חיובי, צריך לבחור + ולכן נקבל:

$$\rho_5 = \frac{a_5 + \sqrt{a_5^2 - 4}}{2} = \frac{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} - 4}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5} + 2\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2} - 4}}{4} = \frac{-1 + \sqrt{5} + \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

שאלה 2

יהיו a, b, c, d ארבעה שורשים שונים של הפולינום $x^5 - 5x + 15$. נגדיר $u = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. חשבו את $[\mathbb{Q}[u]:\mathbb{Q}]$. [רמז: חשבו על הקשרים בין שורשי הפולינום].

פיתרון

$x^5 - 5x + 15$ הוא אי פריק מעל \mathbb{Q} (אייזנשטיין ביחס ל-5) ולכן ספרבילי (כי $\text{char}\mathbb{Q} = 0$). כלומר, יש לו 5 שורשים שונים: $\alpha_1, \dots, \alpha_5$. בלי הגבלת כלליות $a = \alpha_1, b = \alpha_2, c = \alpha_3, d = \alpha_4$. לפי נוסחאות ויאטה הכלליות מתקיים $\alpha_1 + \dots + \alpha_5 = 0$ (כי המקדם של x^4 ב- $x^5 - 5x + 15$ הוא 0) ו- $\sum_{1 \leq i < j \leq 5} \alpha_i \alpha_j = 0$ (כי המקדם של x^3 ב- $x^5 - 5x + 15$ הוא 0). לכן:

$$0 = (\sum_{1 \leq i \leq 5} \alpha_i)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 5} \alpha_i \alpha_j = \sum_{1 \leq i \leq 5} \alpha_i^2$$

זה אומר ש- $-\alpha_5^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2$. לכן, $u \in \mathbb{Q}[\alpha_5]$ ונובע כי:

$$[\mathbb{Q}[u]: \mathbb{Q}] | [\mathbb{Q}[\alpha_5]: \mathbb{Q}] = \deg(x^5 - 5x + 15) = 5$$

לכן, $[\mathbb{Q}[u]: \mathbb{Q}] \in \{1, 5\}$. אם $[\mathbb{Q}[u]: \mathbb{Q}] = 1$ אז $u \in \mathbb{Q}$ וזה אומר ש- α_5 מתאפס ע"י פולינום ממעלה 2 – בסתירה לכך ש- $x^5 - 5x + 15$ הוא הפולינום המינימלי שלו. לכן, $[\mathbb{Q}[u]: \mathbb{Q}] = 5$.

שאלה 3

מצאו את כל תתי השדות של \mathbb{C} שאיזומורפיים ל- $\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{2}}]$. נמקו את קביעתכם.

פיתרון

יהי $f(x) = \sum a_i x^{i-1}$ הפולינום המינימלי של $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ מעל \mathbb{Q} . בכיתה הראינו שהשדות $K \subseteq \mathbb{C}$ שאיזומורפיים ל- $\mathbb{Q}[\alpha]$ הם בדיוק השדות מהצורה $\mathbb{Q}[\beta]$ באשר β שורש של f .

הסבר: יהי $K \subseteq \mathbb{C}$ כך שיש איזומורפיזם של שדות $\psi: \mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{2}}] \rightarrow K$. היות ו- $\psi(1) = 1$, נובע ש- $\psi|_{\mathbb{Z}} = id_{\mathbb{Z}}$ ולכן $\psi|_{\mathbb{Q}} = id_{\mathbb{Q}}$, כלומר ψ הוא הומומורפיזם. לכן, $\psi(\alpha)$ הוא גם שורש של f : כי:

$$f(\psi(\alpha)) = \sum a_i \psi(\alpha)^i = \sum \psi(a_i) \psi(\alpha^i) = \psi(\sum a_i \alpha^i) = \psi(f(\alpha)) = 0$$

אבל $[\mathbb{Q}[\psi(\alpha)]: \mathbb{Q}] = \deg f = [\mathbb{Q}[\alpha]: \mathbb{Q}] = [K: \mathbb{Q}]$ (השוויון האחרון נכון כי ψ הוא איזומורפיזם) ולכן בהכרח $K = \mathbb{Q}[\psi(\alpha)]$. כלומר, $K = \mathbb{Q}[\beta]$ באשר β שורש של f .

מצד שני, אם β שורש של f אז $\mathbb{Q}[\beta] \cong \mathbb{Q}[x]/\langle f \rangle \cong \mathbb{Q}[\alpha]$. **סוף הסבר.**

נמצא את השורשים האחרים של f :

$$\alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha + 2 = (\alpha - \sqrt{2})^2 = 2 + \sqrt{2}$$

מכאן נובע:

$$\alpha^2 = \sqrt{2}(2\alpha + 1)$$

$$(\alpha^2)^2 = 2(2\alpha + 1)^2$$

לכן, α מאפס את $x^4 - 2(4x^2 + 4x + 1) = x^4 - 8x^2 - 8x - 2$. זה פולינום אייזנשטיין ביחס ל-2 ולכן הוא אי פריק מעל \mathbb{Q} . זה אומר ש- $f(x) = x^4 - 8x^2 - 8x - 2$.

מהמשוואה האדומה, נובע ששורשי f מקיימים $x^2 = \sqrt{2}(2x + 1)$ או $x^2 = -\sqrt{2}(2x + 1)$. מהאפשרות $\alpha_{1,2} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8+4\sqrt{2}}}{2} = \sqrt{2} \pm \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ השורשים נקבל את $\alpha_{3,4} = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{8-4\sqrt{2}}}{2} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ השנייה נקבל את השורשים

קעת נשים לב ש- $\mathbb{Q}[\alpha_1] = \mathbb{Q}[\alpha_2]$. הדרך הכי קצרה לראות זאת היא לשים לב ש- $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}[\sqrt{2 + \sqrt{2}}]$. המימד של שדה זה מעל \mathbb{Q} הוא 4 (בדקו!) ולכן בהכרח $\mathbb{Q}[\alpha_1] = \mathbb{Q}[\sqrt{2 + \sqrt{2}}]$ (כי כל השדות ממימד 4).

באותו אופן, $\mathbb{Q}[\alpha_3] = \mathbb{Q}[\sqrt{2 - \sqrt{2}}] = \mathbb{Q}[\alpha_4]$.

לכן, תתי השדות של \mathbb{C} שאיזומורפיים ל- $\mathbb{Q}[\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}]$ הם $\mathbb{Q}[\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}]$ ו- $\mathbb{Q}[\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}]$ (שדות אלה שונים זה מזה, אך לא נדרשתם להראות זאת).

הערה: התשובות $\mathbb{Q}[\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}}]$, $\mathbb{Q}[-\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}]$ וכיו"ב גם נכונות, אבל לא מפני ש- $\sqrt{2} \mp \sqrt{2 - \sqrt{2}} - \sqrt{2} \pm \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ שורשים של f (הם לא).

שאלה 4

מצאו את שדות הפיצול של הפולינומים הבאים וחשבו את המימד שלהם:

1. $x^4 - 6x^2 - 2$
2. $x^6 - 27$

פיתרון

הערה: בסעיפים השונים נשתמש בעובדה הבאה (שהיא די קלה להוכחה ואתם רשאים להשתמש בה): תהי E/F הרחבת שדות אלגברית, $a \in E$ ו- $b \in F$, אזי $F\left[\frac{a}{b}\right] = F[a + b] = F[ab] = F\left[\frac{a}{b}\right]$. מסקנה מיידית: אם $a, b \in E$ אז $F\left[\frac{a}{b}\right] = F[a, ab] = F[a, a + b] = F[a, b]$.

תשובה ל-1: שורש של $x^4 - 6x^2 - 2$ אם ורק אם $t^2 = \frac{6 \pm \sqrt{36+8}}{2} = 3 \pm \sqrt{11}$. לכן, שורשי הפולינום $x^4 - 6x^2 - 2$ הם $\pm\sqrt{3 \pm \sqrt{11}}$. לכן, שדה הפיצול של $x^4 - 6x^2 - 2$ מעל \mathbb{Q} הוא $E = \mathbb{Q}[\pm\sqrt{3 \pm \sqrt{11}}] = \mathbb{Q}[\sqrt{3 + \sqrt{11}}, \sqrt{3 - \sqrt{11}}]$.

כדי לחשב את המימד $[E:\mathbb{Q}]$ נגדיר $K = \mathbb{Q}[\sqrt{3 + \sqrt{11}}]$. הוא שורש של $x^4 - 6x^2 - 2$ וזה פולינום אי פריק (אייזנשטיין ביחס ל-2). לכן $[K:\mathbb{Q}] = \deg(x^4 - 6x^2 - 2) = 4$.

נשים לב ש- $\sqrt{11} \in K$ (בדקו!) ולכן $(\sqrt{3 - \sqrt{11}})^2 \in K$. זה אומר ש- $[E:K] \leq 2$. אם $[E:K] = 1$ אז $\sqrt{3 - \sqrt{11}} \in K$ אבל זה בלתי אפשרי כי $\sqrt{3 - \sqrt{11}} \notin \mathbb{R}$ ו- $K \subseteq \mathbb{R}$ (כי $\sqrt{3 + \sqrt{11}} \in \mathbb{R}$). לכן, $[E:K] = 2$ וקיבלנו ש- $[E:\mathbb{Q}] = [E:K][K:\mathbb{Q}] = 2 \cdot 4 = 8$.

תשובה ל-2: שורשי הפולינום $x^6 - 27$ הם $\{\rho_6^i \sqrt{3}\}_{i=0}^5 = \{\rho_6^i \sqrt[3]{27}\}_{i=0}^5$ לכן שדה הפיצול של $x^6 - 27$ הוא $E = \mathbb{Q}[\sqrt{3}, \rho_6 \sqrt{3}, \dots, \rho_6^5 \sqrt{3}] = \mathbb{Q}[\rho_6, \sqrt{3}]$ והיותו $\rho_6 = \exp\left(\frac{2\pi i}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$ מתקיים: $E = \mathbb{Q}[\rho_6, \sqrt{3}] = \mathbb{Q}\left[\frac{\sqrt{-3}}{2}, \sqrt{3}\right] = \mathbb{Q}[i, \sqrt{3}]$

כעת $[\mathbb{Q}[\sqrt{3}]: \mathbb{Q}] = 2$ ו- $[\mathbb{Q}[i]: \mathbb{Q}] = 2$ אז $[\mathbb{Q}[i, \sqrt{3}]: \mathbb{Q}[\sqrt{3}]] = 1$ אם $[\mathbb{Q}[i, \sqrt{3}]: \mathbb{Q}[\sqrt{3}]] \leq [\mathbb{Q}[i]: \mathbb{Q}] = 2$ וקיבלנו $[\mathbb{Q}[i, \sqrt{3}]: \mathbb{Q}[\sqrt{3}]] = 2$, לכן, $i \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}] \subseteq \mathbb{R}$.
 $[E: \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}[i, \sqrt{3}]: \mathbb{Q}[\sqrt{3}]] \cdot [\mathbb{Q}[\sqrt{3}]: \mathbb{Q}] = 2 \cdot 2 = 4$

הערה: אפשר גם להראות ישירות ש- $i \notin \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$.