קורס: 88-133-01,05,07
מרצים: ד"ר א. שיינר, ד"ר מ. שיין, ד"ר ש. הורוביץ
כ"א תמוז תשע"א

פתרון מבחן בחשבון אינפיניטסמלי 2
מועד א'

ענו על כל השאלות הבאות. כל שאלה שווה 18 נקודות. חומר עזר אסור. <u>אתם חייבים לנמק כל תשובה.</u> משך הבחינה שלוש שעות. בהצלחה!

1. חשבו: א. $\int x^3 \arctan x \, dx$

$$\int x^3 \arctan(x)dx = \left\{ \begin{matrix} f' = x^3, g = \arctan \\ f = \frac{x^4}{4}, g' = \frac{1}{1+x^2} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{4}x^4 \arctan(x) - \frac{1}{4}\int \frac{x^4}{1+x^2}dx = \frac{1}{4}x^4\arctan(x) -$$

$$-\frac{1}{4}\int\left[(x^2-1)+\frac{1}{1+x^2}\right]dx = \frac{1}{4}x^4\arctan(x) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x^3 - x + \arctan(x)\right) + C$$

ב. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2-\cos^2 x}}dx$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2-\cos^2 x}}dx = \left\{ \begin{matrix} t = \cos(x) \\ dt = -\sin(x)dx \end{matrix} \right\} = -\int \frac{1}{\sqrt{2-t^2}}dt = -\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2}}dt =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = \frac{t}{\sqrt{2}} \\ du = \frac{1}{\sqrt{2}}dt \end{matrix} \right\} = -\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = -\arcsin(u) = -\arcsin\left(\frac{\cos(x)}{\sqrt{2}}\right) + C$$

2. א. קבעו אם האינטגרל מתכנס או מתבדר: $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^3+\sqrt{x}}dx$

ראשית נשים לב כי אפס נקודה חשודה. נחשב את הגבול

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan(x)}{x^3+\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan(x)}{x\left(x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan(x)}{x}\frac{1}{\left(x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}\overset{\frac{1}{0+\infty}}{=}0$$

שימו לב שזה נכון כיוון ש

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan(x)}{x}\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}=1$$

לכן לאינטגרל רק צד אחד "בעייתי" באינסוף.

נפעיל את מבחן ההשוואה הגבולי לאינטגרלים חיוביים עם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx$ ונקבל

שהם חברים:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\arctan(x)}{x^3+\sqrt{x}}}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\arctan(x)\frac{x^3}{x^3\left(1+\frac{1}{x^{2.5}}\right)}=\frac{\pi}{2}$$

כיוון ש $3>1$ שני האינטגרלים מתכנסים.

ב. מצאו את גבול הסדרה $a_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\ln(\sqrt[n]{n+k})-\ln(\sqrt[n]{n})\right]$

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left[\ln(n+k)-\ln(n)\right]=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left[\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)\right]=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]$$

וזהו סכום רימן בקטע $[0,1]$ עם החלוקה $\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,1\right\}$ והנקודות $\left\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,1\right\}$ של

הפונקציה $\ln\left(1+x\right)$.

כיוון שזו פונקציה רציפה בקטע הסגור, היא אינטגרבילית, ולכן סכומי הרימן שואפים

לאינטגרל, כאשר פרמטר החלוקה שואף לאפס. פרמטר החלוקה כאן הוא $\frac{1}{n}$, והוא אכן

שואף לאפס.

לכן

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\int_0^1\ln(1+x)dx=\left\{\begin{matrix} f'=1, g=\ln(1+x) \\ f=x, g'=\frac{1}{1+x}\end{matrix}\right\}=\left[x\ln(1+x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=$$

$$=\ln(2)-\int_0^1 1-\frac{1}{1+x}dx=\ln(2)-\left[x-\ln(1+x)\right]_0^1=2\ln(2)-1$$

3. נגדיר: $f(x)=\dfrac{1-2x}{(x+2)(x^2+1)}$.

א. מצאו את טור מקלורין של f וקבעו באיזה תחום הוא מתכנס. (אפשר להשאיר את התשובה כסכום של שני טורים.)

ראשית, באמצעות פירוק לשברים חלקיים נגלה כי

$$f(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{x}{x^2+1}$$

כעת נחשב את הטורים:

$$\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{-x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$$

$$-\frac{x}{x^2+1}=-x\frac{1}{1-(-x^2)}=-x\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n=-x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n+1}$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n+1}$$

כמו כן, רדיוס ההתכנסות של הטור הראשון הינו $R_1=\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\dfrac{1}{2^{n+1}}}}=2$ ורדיוס ההתכנסות של הטור השני הינו $R_2=\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[2n+1]{1}}=1$.

לכן הטור מתכנס עבור $-1<x<1$ כיוון שמדובר בסכום של שני טורים מתכנסים, ולא מתכנס עבור $1<x<2$ כיוון שמדובר בסכום של טור מתכנס וטור מתבדר.
לכן בהכרח רדיוס ההתכנסות של סכום הטורים הינו $R=1$.

בקצוות $x=\pm1$ הטור הראשון מתכנס והשני לא, ולכן הסכום אינו מתכנס.
סה"כ תחום ההתכנסות הינו $(-1,1)$.

ב. חשבו את $f^{(2015)}(0)$.

$$\frac{f^{(2015)}(0)}{2015!}=\frac{1}{2^{2016}}+1$$

ולכן

$$f^{(2015)}(0)=\frac{2015!}{2^{2016}}+2015!$$

4. נניח ש- $f(x)$ פונקציה חסומה ואינטגרבילית רימן-דרבו בקטע $[0,4]$. עוד נניח שלכל תת-קטע $I \subset [0,4]$ קיימת (לפחות) נקודה אחת $x_0 \in I$ כך ש- $f(x_0) \le 2$.

הוכיחו ש- $\int_0^4 f(x)dx \le 8$.

תהי חלוקה כלשהי של הקטע $[0,4]$. ניקח סכום רימן של הפונקציה על החלוקה, ובכל חלק נבחר נקודה עבורה $f(c_i) \le 2$.

לכן סכום הרימן הינו $\sum_{k=1}^{n} |x_i - x_{i-1}| f(c_i) \le 2\sum_{k=1}^{n} |x_i - x_{i-1}| = 2(4-0) = 8$

לפי משפט, עבור פונקציה אינטגרבילית, סכומי הרימן שואפים לאינטגרל.
כיוון שכל סכומי הרימן קטנים או שווים ל8, כך גם גבולם.
(באופן מפורט, אם האינטגרל היה גדול מ8, נבחר את אפסילון להיות חצי המרחק בין האינטגרל לבין 8, ולכן חייב להיות סכום רימן שקרוב לאינטגרל עד כדי אפסילון, ולכן חייב להיות גדול ממש מ8).

5. א. מצאו את טור פוריה של ההמשך המחזורי של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \pi x & 0 \le x \le \pi \\ -f(-x) & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

ראשית נבחין כי $f(x)$ פונקציה אי זוגית.

$$f(-x) = \begin{cases} -x^2 + \pi x & 0 \le x \le \pi \\ x^2 + \pi x & -\pi < x < 0 \end{cases} = -f(x)$$

לכן טור הפורייה הוא בעצם טור סינוסים.

כעת,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (x^2 - \pi x)\sin(nx)\,dx = \begin{Bmatrix} f' = \sin(nx), g = x^2 - \pi x \\ f = \dfrac{-\cos(nx)}{n}, g' = 2x - \pi \end{Bmatrix} = \left[\frac{-2\left(x^2 - \pi x\right)\cos(nx)}{\pi n}\right]_0^{\pi} +$$

$$+\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} \left(2x - \pi\right)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} \left(2x - \pi\right)\cos(nx)\,dx = \begin{Bmatrix} f' = \cos(nx), g = 2x - \pi \\ f = \dfrac{\sin(nx)}{n}, g' = 2 \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left[\frac{\left(2x - \pi\right)\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n^2}\int_0^{\pi} 2\sin(nx)dx = \left[\frac{4}{\pi n^3}\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{4\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^3}$$

סה"כ טור הפורייה של הפונקציה הינו

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^3}\sin(nx) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8}{\pi(2k-1)^3}\sin\left((2k-1)x\right)$$

ב. קבעו באיזה תחום הטור מתכנס ל- $f(x)$.

כיוון ש $f(x)$ רציפה וההמשך המחזורי שלה רציף בכל נקודה ($\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$, $\lim_{x\to \pi^-} f(x)=\lim_{x\to -\pi^+} f(x)=0$), וכמו כן הנגזרות החד צדדיות שלה קיימות בכל נקודה, טור הפוריה מתכנס לכל x .

6. תהי $\{f_n(x)\}$ סדרת פונקציות גזירות שמתכנסות בקטע סגור $[a,b]$ לפונקציית הגבול גזירה $f(x)$. נניח שלכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in[a,b]$, $f_n'(x)>f'(x)$. הוכיחו כי $f_n\to f$ במ"ש ב- $[a,b]$. (הדרכה: התבוננו ב - $\sup|f_n(x)-f(x)|$.)

נשתמש במבחן הlim sup.

כיוון ש $(f_n(x)-f(x))'=f_n'(x)-f'(x)>0$, נובע כי $f_n(x)-f(x)$ פונקציה מונוטונית עולה ומקבלת את המינימום והמקסימום שלה בקצוות.

לכן $\sup_{[a,b]}|f_n(x)-f(x)|=\max\{|f_n(a)-f(a)|,|f_n(b)-f(b)|\}$

כיוון שסדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית,

$\lim_{n\to\infty}|f_n(a)-f(a)|=0$ וגם $\lim_{n\to\infty}|f_n(b)-f(b)|=0$

ולכן ביחד $\lim_{n\to\infty}\sup_{[a,b]}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\max\{|f_n(a)-f(a)|,|f_n(b)-f(b)|\}=0$.

לכן סדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש.