

פתרון תרגיל 7 אינפי 2 למדמ"ח

שאלה 1

1. היות ו $2 \ln x \leq \ln^2 x$ (החל מנקודה כלשהיא) אז

$$e^{-\ln x^2} \leq e^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2}$$

היות ו $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ מתכנס, אז גם האינטגרל שלנו מתכנס.

2. נפצל את האינטגרל (נראה עוד שניה למה)

$$\int_0^\infty x^2 \sin x^4 dx = \int_0^1 x^2 \sin x^4 dx + \int_1^\infty x^2 \sin x^4 dx$$

האינטגרל הראשון הוא אינטגרל רגיל והוא קיים. בשביל האינטגרל השני נציב $t = x^4$ כלומר $dt = 4x^3 dx$ ולכן

$$\int_1^\infty x^2 \sin x^4 dx = \int_1^\infty \frac{\sin t}{x} dt = \int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt[4]{t}} dt$$

(פיצלנו בהתחלה את התחום כדי שכאן לא נגיע לאינטגרל לא אמיתי (גם) מסוג שני). האינטגרל שהתקבל מתכנס לפי דיריכלה.

3. מתכנס לפי דיריכלה.

4. נשים לב ש

$$\frac{\cos^2(x)}{x} \leq \frac{|\cos x|}{x}$$

והיות שבסעיף הבא נראה שיש התבדרות גם האינטגרל שלנו מתבדר לפי מבחן ההשוואה.

5.

$$\int_1^\infty \frac{\cos^2(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{2 \cos(x)}{x} dx$$

האינטגרל הימני מתכנס לפי דיריכלה והאינטגרל השמאלי מתבדר לכן בסך הכל האינטגרל מתבדר.

6.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x - \arctan x}{x(1+x^2) \arctan x} dx &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2) \arctan x} dx + \int_1^\infty \frac{1}{(1+x^2) \arctan x} dx \\ &\quad - \int_0^1 \frac{1}{x(1+x^2)} dx - \int_1^\infty \frac{1}{x(1+x^2)} dx \end{aligned}$$

באינטגרל הכי שמאלי נציב $t = \arctan x$ ונקבל

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)\arctan x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{t} dt$$

שזה מתבדר ולכן האינטגרל המקורי מתבדר (אין צורך לבדוק את שאר האינטגרלים)

.7

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x\sqrt{|\ln x|}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x\sqrt{-\ln x}} dx$$

נציב $t = -\ln x$ ולכן $dt = -\frac{1}{x} dx$ כלומר

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x\sqrt{-\ln x}} dx = - \int_{-\ln \frac{1}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{-\ln \frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

וזה אינטגרל מתכנס ולכן גם האינטגרל שלנו מתכנס.

.8

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3+x}} dx = \int_0^1 \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3+x}} dx + \int_1^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3+x}} dx$$

את האינטגרל השמאלי ניתן להשוות עם

$$\frac{x}{\sqrt{x^3+x}}$$

ולקבל

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

כמו כן,

$$\frac{x}{\sqrt{x^3+x}} = \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}}$$

שאת זה אפשר להשוות במבחן ההשוואה הגבולי עם $\frac{1}{\sqrt{x}}$. היות ו $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$ מתכנס. גם

האינטגרל השמאלי מתכנס. את האינטגרל הימני אפשר להשוות במבחן ההשוואה הגבולי ל $\frac{1}{x^{1.5}}$ ולקבל

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{3}{2}} \arctan x}{\sqrt{x^3+x}} = \frac{\pi}{2}$$

היות ו $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ מתכנס גם האינטגרל שלנו מתכנס.

שאלה 2

1. אם $\alpha \leq 1$ נשים לב ש

$$\frac{\sin^2 x}{x} \leq \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}$$

היות ו $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}$ מתבדר (זה כמו בשאלה 1 סעיף 5) ברור שגם האינטגרל שלנו מתבדר. לעמות זאת אם $\alpha > 1$ אז היות ו

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} - \int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x^\alpha}$$

שהאינטגרל הימני מתכנס לפי דיריכלה וגם האינטגרל השמאלי מתכנס ולכן האינטגרל הכולל גם מתכנס.

2.

$$\int_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x^\alpha} dx$$

נבצע מבחן השוואה עם

$$\frac{1}{x^{\alpha-2}}$$

קל לראות ש

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin^2(x)}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^{\alpha-2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = 1$$

היות ו $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-2}} dx$ מתכנס אם ורק אם $\alpha < 3$ אז גם האינטגרל שלנו מתכנס במצבים אלה.

3.

$$\int_0^1 |\ln(x)|^\alpha dx$$

עבור $\alpha > 0$ נבצע השוואה עם $\frac{1}{\sqrt{x}}$, ונקבל

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\ln(x)|^\alpha}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} |\ln(x)|^\alpha = 0$$

היות ו $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ מתכנס גם האינטגרל שלנו מתכנס. עבור $\alpha = 0$ ברור שהאינטגרל מתכנס. עבור $a > 0$ נקבל שעדיין האינטגרל לא אמיתי, והפעם הבעיה ב 1. (בסביבת 0 הפונקציה חסומה). אפשר לכתוב את האינטגרל כ

$$\int_0^1 \frac{1}{|\ln(x)|^\beta} dx$$

כאשר $\beta = -\alpha > 0$. נתמקד בחלק הבעייתי

$$\int_a^1 \frac{1}{|\ln(x)|^\beta} dx$$

כאשר $a > 0$ נבצע השוואה עם $\frac{1}{x|\ln(x)|^\beta}$ ונקבל

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x|\ln(x)|^\beta}{|\ln(x)|^\beta} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$$

את האינטגרל הזה

$$\int_a^1 \frac{1}{x|\ln(x)|^\beta} dx = \int_a^1 \frac{1}{x(-\ln(x))^\beta} dx$$

קל לחשב, נציב $t = -\ln x$ ולכן $dt = -\frac{1}{x} dx$.

$$\int_a^1 \frac{1}{x(-\ln(x))^\beta} dx = - \int_{\ln a}^0 \frac{1}{t^\beta} dt = \int_0^{\ln a} \frac{1}{t^\beta} dt$$

האינטגרל הזה מתכנס כאשר $\beta < 1$. לסיכום האינטגרל המקורי מתכנס כאשר $\alpha > -1$.

שאלה 3

סעיף א

נציב $z = \int_0^x f(t) dt$ ואז $dz = f(x) dx$ כלומר

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{\int_0^x f(t) dt} dx = \int_a^\infty \frac{1}{z} dz = \infty$$

כאשר $a = \int_0^1 f(t) dt$ נשים לב שהשתמשנו בנתון $\int_0^\infty f(t) dt = \infty$ כדי לקבוע את הגבול העליון של האינטגרל אחרי הצבה.

סעיף ב

נבחר

$$f(x) = e^{-x}$$

ואז לפי השיקול בסעיף א נקבל

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{\int_0^x f(t) dt} dx = \int_a^b \frac{1}{z} dz < \infty$$

$$.b = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1 \text{ ו } a = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - e^{-1} \text{ כאשר}$$