

תרגיל בית 4 מבוא לחוגים ומודולים 88-212 סמסטר ב' תשע"ח

שאלה 1. יהיו $I, J \triangleleft R$ אידאלים קו־מקסימליים (R לא בהכרח חילופי).

א. הוכיחו $I \cap J = IJ + JI$.

ב. הוכיחו כי לכל $n, m \in \mathbb{N}$ גם I^n ו- J^m הם קו־מקסימליים. תזכורת: בסימון $I^n = I \cdots I$ הכוונה למכפלת אידאלים כאשר I מופיע n פעמים.

שאלה 2. בחוג $R = \mathbb{Z}[x, y]$ נסמן שלושה אידאלים:

$$I_0 = \langle x, y \rangle, \quad I_1 = \langle x - 1, y - 3 \rangle, \quad I_2 = \langle x - 2, y - 5 \rangle$$

א. הוכיחו שכל שניים מבין האידאלים הם קו־מקסימליים.

ב. הוכיחו ש- $R/I_1 \cong \mathbb{Z}$ (טענה זו נכונה גם ל- I_0 ול- I_2).

שאלה 3.

א. הוכיחו שהחוגים הבאים איזומורפיים

$$R = \mathbb{F}_2[x]/\langle x^2 \rangle, \quad S = \mathbb{F}_2[x]/\langle x^2 - 1 \rangle$$

ב. הוכיחו שהחוגים הבאים לא איזומורפיים

$$R = \mathbb{Q}[x]/\langle x^2 \rangle, \quad S = \mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - 1 \rangle$$

ג. הוכיחו שהחוגים הבאים איזומורפיים

$$R = \mathbb{C}[x, y]/\langle xy - 1 \rangle, \quad S = \mathbb{C}[x, y]/\langle x^2 + y^2 - 1 \rangle$$

שאלה 4. יהי R חוג חילופי, יהי $a \in R$ איבר נילפוטנטי (כלומר קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש- $a^k = 0$), ויהי $f(x) = r_n x^n + \cdots + r_1 x + r_0 \in R[x]$.

א. הוכיחו כי $a = 0$ או ש- a מחלק אפס.

ב. הוכיחו כי $1 + a \in R^\times$. תזכורת: אנחנו מסמנים את קבוצת האיברים ההפיכים בחוג R ב- R^\times .

ג. הוכיחו שאם $u \in R^\times$, אז גם $u + a \in R^\times$.

ד. הוכיחו כי $f(x)$ הפיך ב- $R[x]$ אם ורק אם r_0 הפיך ו- r_1, \dots, r_n נילפוטנטיים.

ה. הוכיחו כי $f(x)$ נילפוטנטי ב- $R[x]$ אם ורק אם r_0, r_1, \dots, r_n נילפוטנטיים.

שאלה 5. ראינו שעבור קבוצה X , אז $(P(X), \Delta, \cap)$ הוא חוג בוליאני. בתרגיל בית 1 הוכחתם שכל חוג בוליאני הוא חילופי. ננסה להוכיח את הכיוון ההפוך: כל חוג בוליאני A משוכן בחוג מן הצורה $(P(X), \Delta, \cap)$.

- א. הוכיחו שלכל $a \in A$ מתקיים $a + a = 0$. לכן המאפיין של A הוא 2.
- ב. הוכיחו שהשדה היחיד שהוא גם חוג בוליאני הוא \mathbb{F}_2 .
- ג. הוכיחו שלכל אידאל מקסימלי $M \triangleleft A$ מתקיים $A/M \cong \mathbb{F}_2$.
- ד. יהי $M \triangleleft A$ אידאל מקסימלי ויהי $a \in A$. הוכיחו כי $a \in M$ או $1 - a \in M$, אבל לא שניהם.
- ה. יהי $a \in A$, $a \neq 0$. הוכיחו שקיים אידאל מקסימלי $M \triangleleft A$ שאינו מכיל את a .
- ו. תהי X קבוצת כל האידאלים המקסימליים של A . הוכיחו שהעתקה $\varphi: A \rightarrow (P(X), \Delta, \cap)$ השולחת את $a \in A$ לקבוצת כל האידאלים המקסימליים שלא מכילים אותו היא שיכון של חוגים.

בהצלחה!