

## 88-235 אנליזת פורייה – מבחן לדוגמא

מרצה: דר' ארז שיינר      משך המבחן: שלוש שעות      חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד  
משקל כל שאלה: 28 נק'      ענו על כל השאלות      כל ציון מעל 100 יעוגל ל-100

1. נסמן את טור הפורייה של  $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$  ב  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$

א. מצאו את המקדמים  $a_n, b_n$ .

ב. חשבו את הטורים  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{1-4n^2}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{1-4n^2}$ .

2. תהי  $f \in E$ , ונסמן את מקדמי הפורייה שלה ב  $a_n, b_n$ . נגדיר את הפונקציות

$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

א. הוכיחו כי טור הפורייה של  $g(x)$  הוא  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$

וטור הפורייה של  $h(x)$  הוא  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$

ב. נתון בנוסף כי  $f(x) = e^x$ , חשבו את  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ .

3.

א. תהי  $f \in E$  כך ש'  $f, f$  רציפות,  $f''$  רציפה למקוטעין ו  $f(\pi) = f(-\pi)$ .  
נסמן את מקדמי הפורייה של  $f$  ב  $a_n, b_n$ .

הוכיחו כי  $f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n$ .

ב. נתון כי טור הפורייה של הפונקציה  $f(x) = x^3 - \pi^2 x$  הוא  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{n^3} \sin(nx)$ .

חשבו את  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ .

4. תהי  $f \in G$  רציפה כך שגם התמרת הפורייה שלה  $F$  מקיימת  $F \in G$ .  
א. הביעו את התמרת הפורייה של  $F$  באמצעות  $f$ .

ב. נזכור כי התמרת הפורייה של  $f = e^{-|x|}$  היא  $F(s) = \frac{1}{\pi(1+s^2)}$

חשבו את התמרת הפורייה של  $\frac{1}{1+x^2}$ .