0208-09

הרצאה 9

תזכורת – בסיס ומימד – dim V

מעבר בין בסיסים: מט' מעבר

מרחבי קואורדינטות

$$[I]_{B_2}^{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[v]_{B_2}$$

משפט המימדים:

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$$

השלש מינים: $S\subseteq V$

① $|S|=\dim V$, ② פורשת, ③ בת"ל

מרחבי המטריצה: $R(A),\ C(A),\ N(A)$

- $\dim R(A)=\dim C(A)=\operatorname{rank}(A)$
- $\operatorname{rank}(A)+\dim N(A)=m$ (מס' העמודות)
- $\dim C(A)=$ מס' המשתנים התלויים בצורה מדורגת של A
- $\dim N(A)=$ מס' המשתנים החופשיים בצורה מדורגת של A

דוגמה:

$$V_\alpha:=\{f\in\mathbb{F}_d[x]\mid f(\alpha)=0\}=\mathbb{F}_d[x]\quad(d\geq1)$$

ראינו שזהו תמ"ו. נחשב את $\dim V_\alpha$.

נחפש בסיס - נתחיל מקבוצה פורשת.

$$P_1 = x-\alpha \in V_\alpha$$
$$x^2-\alpha^2 \in V_\alpha$$
$$\vdots$$
$$P_d = x^d-\alpha^d \in V_\alpha$$

$$x^k-\alpha^k \quad \forall\ 1\le k\le d$$

האם זה בסיס ל- V_α? כדי לבדוק זאת נעבור למרחב הקואורדינטות ע"פ הבסיס הסטנדרטי ל- $\mathbb{F}_d[x]$:

$$\begin{array}{c} 1 \\ x \\ \vdots \\ \\ x^d \end{array} \quad d+1\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha & -\alpha^2 & \cdots & -\alpha^d \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}}_{d \text{ עמודות}} \right. = \begin{bmatrix} | & & | \\ [P_1]_E & \cdots & [P_d]_E \\ | & & | \end{bmatrix}$$

בפעולת דירוג פשוטה:

$$R_1 \leftarrow R_1 + \alpha R_2 + \alpha^2 R_3 + \dots + \alpha^d R_{d+1}$$

נאפס את השורה הראשונה, ונמשיך בהחלפת שורות:

$$CF = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

מס' המשתנים התלויים $= d$ ולכן

$\{p_1, \dots, p_d\} \subseteq V_\alpha$ בת"ל.

מסקנה: $\dim V_\alpha \geq d$.

נראה כי $\dim V_\alpha = d$. אחרת,

$\dim V_\alpha = d+1$

(הרי $V_\alpha \subseteq \mathbb{F}_d[x]$ ולכן $\dim V_\alpha \leq d+1$)

---

* אם $W \leq V$ תמ"ו, $\dim W = \dim V$ אז $W = V$.

הוכחה: יהי B בסיס ל-W. הנ"ל מהווה קב' בת"ל.
ולכן ניתן להשלימו לבסיס ל-V, נסמנו B'.

$B = \{w_1, \dots, w_n\}$

$B' \supseteq B$

$|B'| = |B| = n \Leftarrow B = B'$ ולכן B בסיס
ל-V לכן:

$V = \mathrm{Span}\, B = W$. מש"ל.

בחזרה לתרגיל... אם $\dim V_\alpha = d+1$ אז:

$$V_\alpha = \mathbb{F}_d[x].$$

זה כמובן לא נכון כי:

$$1 \in \mathbb{F}_d[x] \setminus V_\alpha.$$

מסקנה:

$$\dim_{\mathbb{F}} V_\alpha = d.$$

השלמת התרגיל: הרעיון של פולינום ב-$\mathbb{F}_d[x]$ ניתן להציג כסכום של פולינום המתאפס ב-α ופולינום שכל מקדמיו שווים.

הניחו $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $\alpha = 1$.

$$\underbrace{f(x) = p(x)}_{\text{פולינום שמתאפס ב-}1} + \text{פולינום שכל מקדמיו שווים} \longleftarrow f(x) \in \mathbb{C}_d[x]$$

(למשל: $3+3x+\dots+3x^d$)

למעשה: שאלתי האם:

$$\mathbb{C}_d[x] = V_1 + \underbrace{W}_{\text{תמ״ש של פולינומים שכל מקדמיהם שווים}}$$

$$W = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{1 + x + \dots + x^d\}$$

נחשב את המימד:

$$\dim_{\mathbb{C}}(V_1 + W) = \overbrace{\dim_{\mathbb{C}} V_1}^{d} + \overbrace{\dim_{\mathbb{C}} W}^{1} -$$

$$-\dim_{\mathbb{C}}(\underbrace{V_1\cap W}_{?})$$

נניח $f\in V_1\cap W$, אזי: $f(x)=\lambda+\lambda x+\dots+\lambda x^d$

ומתקיים $f(1)=0$ כלומר: $0=f(1)=\lambda(d+1)$

ולכן $\lambda=0$, כלומר $f(x)=0$.

לכן משפט המימדים, $\dim_{\mathbb{C}}(V_1+W)=d+1$

ולכן: $V_1+W=\mathbb{C}_d[x]$ (כי אותו ממד). מ.ש.ל.

העתקות ליניאריות

<u>הגדרה</u>: יהיו V,W מ״ו מעל שדה $\mathbb{F}$. נאמר שפונקציה:

$T:V\longrightarrow W$ היא <u>העתקה ליניארית</u> (ה״ל)

אם:

⊕ <u>מוגדרת היטב</u> (חד-ערכית)

לכל $v\in V$, $T(v)$ מוגדר ביחידות.

⊕ <u>ליניאריות</u>:

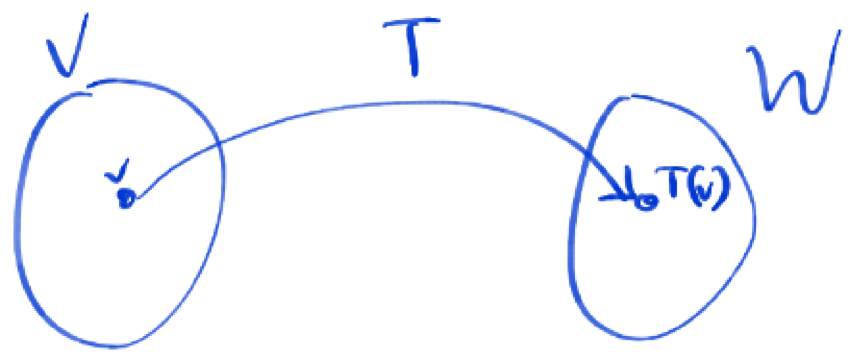
$$\begin{cases} \bullet\ T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2) \\ \bullet\ T(\alpha v)=\alpha T(v) \end{cases}$$

<u>בשורה אחת</u>:

$$\boxed{\forall v_1,v_2\in V,\ \alpha\in\mathbb{F}:\quad T(v_1+\alpha v_2)=T(v_1)+\alpha T(v_2)}$$

ז״א, סגור לכפל בסקלר ״ומכבדת החיבור״ ע״י T. נקבל:

$$T(\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n)=\alpha_1 T(v_1)+\dots+\alpha_n T(v_n)$$



דוגמאות:

① העתקת האפס. לכל מרחב V ניתן להתאים העתקה:

$$T: V \longrightarrow \underbrace{\{0\}}_{\text{"המרחב הטריוויאלי"}}$$

המוגדרת ע"י:

$$\forall v \in V, \quad T(v)=0$$

מוגדרת היטב:

ליניאריות:

$$T(v_1+\alpha v_2)=0$$

$$T(v_1)+\alpha T(v_2)=0+\alpha\cdot 0=0$$

② העתקת הזהות. לכל מרחב V ניתן להתאים העתקה:

$$I: V \longrightarrow V$$

המוגדרת ע"י:

$$\forall v \in V, \quad I(v)=v$$

ברור כי מוגדרת היטב, ליניארית:

$$I(v_1+\alpha v_2)=v_1+\alpha v_2=I(v_1)+\alpha I(v_2).$$

③ $T: \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$ (נניח: $m \le n$).

$$T : \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$$:נגד'

צ"ל:

$$T\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 + \lambda\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \lambda\beta_n \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 + \lambda\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_m + \lambda\beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} =$$

$$= T\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}\right) + \lambda T\left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}\right)$$

4 נניח $m \geq n$. $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$

:נגד'

$$T\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Big\} m-n$$

צ"ל:

$$T\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 + \lambda\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \lambda\beta_n \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 + \lambda\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \lambda\beta_n \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}\right) + \lambda T\left(\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}\right)$$

הערה:

"על $R_d[x]$ נגדיר "פונקציה" לפי:

$p(x) \longmapsto$ לשורש שלו."

לא מוגדרת היטב:

- יש פולינומים ללא שורש ממשי, (x^2+1).
- יש פולינומים עם כמה שורשים, x^2-1.

2

$$T : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Big\}\, m-n$$

נבדק לינ' הכל!

למעשה:

טענה: אם $T:V\to W$ ה"ל אזי:

$T(0_V) = 0_W$.

הוכחה:

$$T(0_V + 0_V) \underset{\text{לינאריות } T}{=} T(0_V) + T(0_V)$$

מצד שני:

$$T(0_V+0_V)=T(0_V)$$

נקבל:

$$T(0_V)=T(0_V)+T(0_V)$$

ב-W יש, ונוסיף נגדי:

$$\underbrace{T(0_V)+(-T(0_V))}_{\|} = \underbrace{T(0_V)+\cancel{T(0_V)+(-T(0_V))}}_{\|}$$

$$\boxed{0_W = T(0_V)}$$

מ.ש.ל.

__הערה:__ מתקיים גם:

$$T(-v)=-T(v)$$ כי:

$$T(-v)=T((-1)\cdot v)=(-1)\cdot T(v)=-T(v)$$

11^{05}

6

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1+3x_2\\x_2-x_3\\x_1+x_2\end{pmatrix}$$

פונקציה $T:\mathbb{F}^3\to\mathbb{F}^3$ שהיא ט.ל.

למעשה, תמיד 3:

$T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ המוגדרת לפי:

$$T\left(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ \vdots\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\alpha_{11}x_1+\cdots+\alpha_{1n}x_n\\ \vdots\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \cdots + \alpha_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

הנ"ל.

נשים לב כי:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ובאופן יותר כללי: לכל $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$

מתקיים: $T : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$

המוגדרת ע"י:

$$T : v \longmapsto Av$$

(במילים אחרות, $T(v) = Av$) הינה ה"ל.

<u>הוכחה:</u>

$$T(v_1 + \alpha v_2) = A(v_1 + \alpha v_2) =$$

$$= Av_1 + \alpha A v_2 = T(v_1) + \alpha T(v_2)$$

7 תרגיל $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$, נגדיר ה"ל:

$$T : \mathbb{F}^{m \times k} \longrightarrow \mathbb{F}^{n \times k}$$

ע"י:

$$T(B) := AB$$

צל. הל״:

$$T(B_1+\alpha B_2) = A(B_1+\alpha B_2) =$$
$$= AB_1 + \alpha AB_2 = T(B_1) + \alpha T(B_2)$$

8. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+x'+y+y' \\ (x+x')^2+(y+y')^2 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+x'+y' \\ x^2+y^2+x'^2+y'^2 \end{pmatrix}$$

בפרט, עבור $x=x'=y=y'=1$ לא מתקיים שוויון:

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \neq T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

צל. ~~לינה~~ הל״!

9. $T: M_{n \times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$

$$T(A) := tr(A)$$

סכום איברי האלכסון

הל״:

$$T(A+\alpha B) =$$
$$= \sum^n (A+\alpha B)_{ii} = \sum^n (A_{ii}+\alpha B_{ii}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (A+\alpha B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (A_{ii} + \alpha B_{ii}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_{ii} + \alpha \sum_{i=1}^{n} B_{ii} = T(A) + \alpha T(B)$$

שחלוף $\quad T : M_{n\times m}(\mathbb{F}) \to M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 10

$$T(A) := A^T$$

ז.א. ה"ל, כפי שהוכח קודם.

$$T : \mathbb{F}_d[x] \longrightarrow \underbrace{\mathbb{F}}_{\substack{\text{מרחב חד-ממדי} \\ \mathbb{F}^1}}$$ 11

$(\alpha \in \mathbb{F})$

המוגדרת לפי:

הצבה. $\quad T(f(x)) := f(\alpha)$

ה"ל:

$$T(f+\lambda g) = (f+\lambda g)(\alpha) =$$

$$= f(\alpha) + \lambda g(\alpha) = T(f) + \lambda T(g)$$

$(d \geq 1)$

$$T : \mathbb{F}_d[x] \to \mathbb{F}_{d-1}[x]$$ 12

המוגדרת לפי:

הנגזרת לפי x. $\quad T(f) := f'$

ה"ל:

$$T(f+\alpha g) = (f+\alpha g)' = f' + \alpha g' =$$
$$= T(f) + \alpha T(g)$$

שימו לב לטווח: $\mathbb{F}_{d-1}[x]$.

$$T(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_d x^d) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + \dots$$
$$\dots + d\alpha_d x^{d-1}$$

13 תהי ρ פעולת שורה אלמנטרית, אזי:

$$\rho : M_{n\times m}(\mathbb{F}) \to M_{n\times m}(\mathbb{F})$$

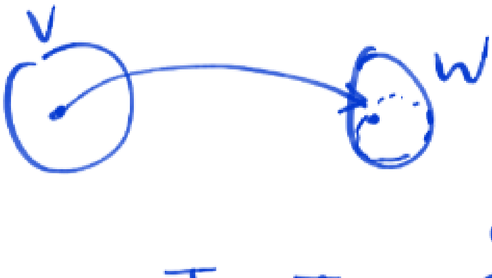
ה״ל. למעשה, ראינו כי:

$$\rho(B) = \rho(I) \cdot B$$

ולכן זהו מקרה פרטי של הבניה 7 לעיל.

<u>הגדרות:</u> תהי $T : V \to W$ ה״ל.

נגדיר:



1 <u>התמונה</u> של T:

$$\operatorname{Im} T = \{ w \in W \mid \exists v \in V : T(v) = w \}$$

2 <u>הגרעין</u> של T:

$$\operatorname{Ker} T = \{ v \in V \mid T(v) = 0 \}$$

$$.\operatorname{Ker} T = \{v \in V \mid T(v) = 0_W\}$$

<u>הערות:</u> מתקיים:

$$\operatorname{Im} T \subseteq W$$

$$\operatorname{Ker} T \subseteq V$$

<u>דוגמאות:</u>

(1) $$T : \overbrace{\mathbb{F}^n}^{V} \longrightarrow \overbrace{\mathbb{F}^m}^{W} \qquad n \geq m$$

לפי:

$$T\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$$

<u>מהם הגרעין והתמונה?</u>

$$\underline{\operatorname{Im} T} = \{w \in \mathbb{F}^m \mid \exists v \in \mathbb{F}^n : T(v) = w\} \underline{= \mathbb{F}^m}$$

מכיוון שלכל $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^m$ מתקיים:

$$T\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\in V} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$$

כלומר, לכל $w \in W$ קיים $v \in V$: $T(v) = w$.

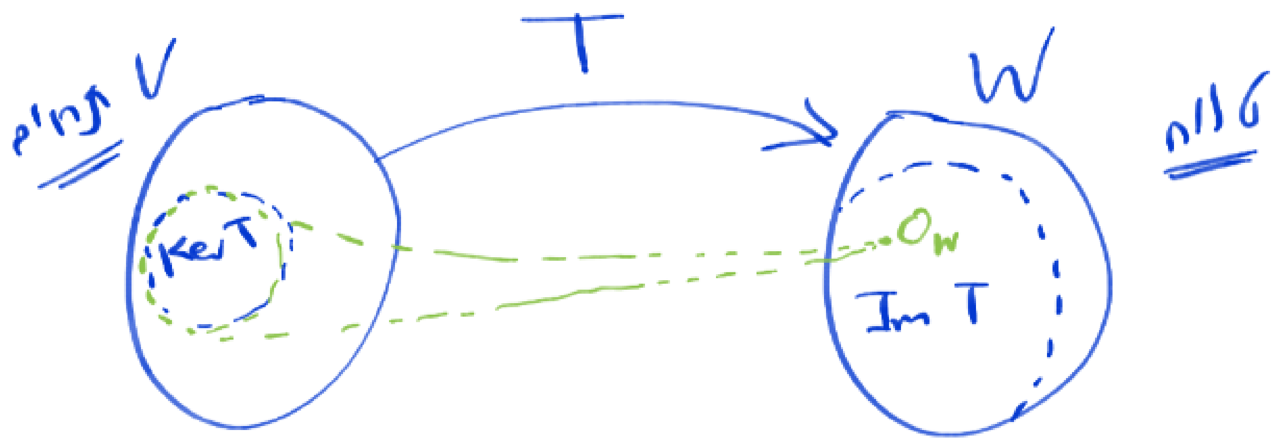
<u>הערה:</u> כאשר $\operatorname{Im} T = W$ (התמונה שווה לטווח), אומרים כי T <u>על</u>.

מהו הגרעין של T?

$$\operatorname{Ker} T = \{ v \in \mathbb{F}^n \mid Tv = 0 \} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n \;\middle|\; T \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n \;\middle|\; x_1 = \cdots = x_m = 0 \right\}$$



$(n \le m)$ $\qquad T: \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$ $\qquad$ ②

$$T \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Im} T = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^m \;\middle|\; \exists v \in \mathbb{F}^n : T(v) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \right\} =$$

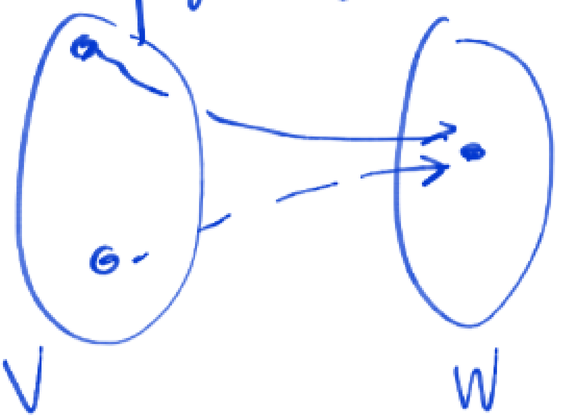
$$= \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F} \right\}$$

$\ker T = \{0\}$.

הערה: ה"ל הוא חד-חד ערכי (חח"ע) אם:

$$T(v_1)=T(v_2) \Longrightarrow v_1=v_2$$

כלומר, אין שני וקטורים שונים המועתקים לאותו וקטור:



> **טענה:** תהי $T:V\to W$ ה"ל. אזי:
> T חח"ע $\iff$ $\ker T=\{0_V\}$.

הוכחה:

($\Leftarrow$): ראשית, ברור כי $0_V\in\ker T$

(ראינו כבר ש- $T(0_V)=0_W$.)

נניח בשלילה שקיים $v\neq 0_V$ בגרעין, אזי:

$$\begin{cases} Tv=0_W \\ T0_V=0_W \end{cases}$$

בסתירה לחח"ע של T, כי קיבלנו שני וקטורים שונים ($v\neq 0$) המועתקים לאותו וקטור ב-W.

($\Rightarrow$) נניח כי T חח"ע.

יהיו: $v_1,v_2 \in V$ כך ש-

$$Tv_1 = Tv_2$$

מכאן: $T(v_1-v_2) = Tv_1 - Tv_2 = 0$

קיבלנו $v_1-v_2 \in Ker\, T = \{0\}$ כלומר $v_1-v_2=0$

ולכן $v_1=v_2$.

הוכחנו שכל זוג וקטורים המועתקים לאותו וקטור ע"י T, שווים זה לזה ולכן T חח"ע. מ.ש.ל.

__טענה:__ תהי $T:V\longrightarrow W$ ה"ל, אזי:

1. $Im\, T \le W$ תמ"ו
2. $Ker\, T \le V$ תמ"ו

__הוכחה:__ 1. לפי הקריטריון לתמ"ו:

- $T(0_V)=0_W$ ולכן: $0_W \in Im\, T$
- נניח $\underbrace{w_1,w_2\in Im\, T}$ ונראה כי $w_1+\alpha w_2 \in Im\, T$.

קיימים $v_1,v_2\in V$ כך ש- $\begin{cases} w_1 = Tv_1 \\ w_2 = Tv_2 \end{cases}$

לכן:

$\Downarrow$

$$\underline{T(v_1+\alpha v_2)} = Tv_1 + \alpha Tv_2 = \underline{w_1+\alpha w_2}$$ וכן

כלומר: $w_1+\alpha w_2 \in \operatorname{Im} T$ כנדרש. מ.ש.ל. ①

② לגבי הקרנל מתקיים:

• $T(0_V)=0_W$ לכן: $0_V \in \operatorname{Ker} T$

• אם $v_1,v_2 \in \operatorname{Ker} T$ נראה כי $v_1+\alpha v_2 \in \operatorname{Ker} T$.

אכן:

$$T(v_1+\alpha v_2) = Tv_1+\alpha Tv_2 = 0+\alpha\cdot 0 = 0$$

לכן: $v_1+\alpha v_2 \in \operatorname{Ker} T$. כנדרש. מ.ש.ל. ②

תרגיל:

$(\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2)$

① $L: M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$

$$L(A) = A - A^T$$

ה"ל? גרעין ותמונה?

ה"ל:

$$L(A+\alpha B) = (A+\alpha B) - (A+\alpha B)^T =$$

$$= (A+\alpha B) - A^T - \alpha B^T = (A-A^T) + \alpha(B-B^T) =$$

$$= L(A) + \alpha L(B)$$

מרכז:

$$\operatorname{Ker} L = \{A\in M_n(\mathbb{F}) \mid L(A)=0\}$$

$$L(A) = A - A^T = 0 \iff A = A^T$$

מטריצות סימטריות.

טענה: להוכיח - $\operatorname{Im} L = \{$מטריצות אנטי-סימטריות$\}$.

הכלה דו״כ:

$(\subseteq)$: יהי $B\in \operatorname{Im} T$, קיים $A\in M_n(\mathbb{F})$ ש:

$$B = L(A) = A - A^T$$

אזי:

$$B^T = (A-A^T)^T = A^T - A = -(A-A^T) = -B$$

ולכן B אנטי-סימטרית.

$(\supseteq)$: תהא B אנטי-סימטרית ונראה שיש $A\in M_n(\mathbb{F})$ כך ש- $B = L(A)$.

נכתוב:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & \cdots & & b_{1n} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ -b_{13} & -b_{23} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b_{n-1,n} \\ - & \cdots & & - & 0 \end{bmatrix}$$

ח

ולכן:

$$\ldots 0_{1n} \qquad 0_{n-1,n} \ldots$$

$$B=\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & b_{23} \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{n-1,n} \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}}_{A}+\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ b_{12} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b_{1n} & \cdots & b_{n-1,n} & 0 \end{bmatrix}}_{A^T}$$

הראנו את הדרוש. מ.ש.ל.

② תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ ונגדיר:

$$T: M_n(\mathbb{F}) \longrightarrow M_n(\mathbb{F})$$ לפי:

$$T(B) = AB$$

ראינו שלפי הג'. מתי T על? מתי T חח"ע?

$$\operatorname{Im} T = M_n(\mathbb{F}) \qquad \operatorname{Ker} T = \{0\}$$

<u>טענה:</u> T חח"ע $\Longleftrightarrow$ T על $\Longleftrightarrow$ A הפיכה.

<u>A הפיכה $\Longleftarrow$ T על:</u>

יהי $B\in M_n(\mathbb{F})$ ניתן לקחת את $A^{-1}B$ כמקור:

$$T(A^{-1}B) = AA^{-1}B = B$$

לכן $B\in \operatorname{Im} T$ כלומר $\operatorname{Im} T = M_n(\mathbb{F})$.

T על $\Leftarrow$ A הפיכה:

אם T על, בפרט $I_n \in \operatorname{Im} T$ כלומר יש B:

$$AB = T(B) = I$$

כלומר, B הופכית של A.

[את ההוכחה שזה שקול לכך ש-T חח"ע נשאיר כתרגיל (לא להגשה) עבורכם.]

משפט הרחבה - ניתן להגדיר ה"ל על בסיס:

משפט: יהיו V,W מ"ו מעל שדה F.

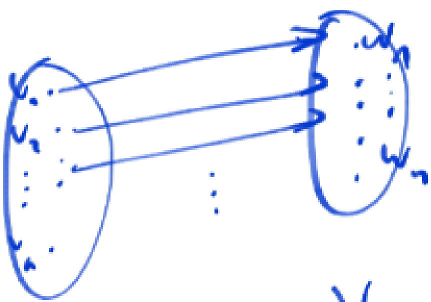
נניח $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס ל-V.

יהיו $w_1,\dots,w_n \in W$ וקטורים כלשהם.

אזי קיימת ה"ל יחידה T המקיימת:

$$T: V \to W$$

$$Tv_1 = w_1, \dots, Tv_n = w_n$$



הוכחה:

נניח $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס ל-V

ו- $w_1,\dots,w_n \in W$ וקטורים כלשהם.

ראשית, נראה כי קיימת T כזאת. נגדיר T כדלקמן:

יהי $v\in V$. נציג אותו כצ"ל של איברי הבסיס:

$$\exists \alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}:\quad v=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n$$

נגדיר:

$$\boxed{Tv := \alpha_1w_1+\dots+\alpha_nw_n}.$$

מתקיים:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = 1\cdot v_1 + 0 \text{ — } \\ v_2 = 0\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + 0 \text{ — } \\ \vdots \\ v_n = 0 \text{ — } + 0 + 1\cdot v_n \end{array}\right. \implies \left.\begin{array}{l} Tv_1 = w_1 \\ Tv_2 = w_2 \\ \vdots \\ Tv_n = w_n \end{array}\right\}$$

צריך להראות כי T אכן ה"ל!

1) T <u>מוגדרת היטב</u>: מכיוון ש-B בסיס אנחנו יודעים שההצגה של וקטור לפי B <u>יחידה</u> (משפט יחידות ההצגה לפי בסיס).

כלומר $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ מוגדרים היטב, ולכן גם

$$Tv=\alpha_1w_1+\dots+\alpha_nw_n.$$

(<u>הערה:</u> אם B לא היה בסיס אלא סתם קב' פורשת, T לא הייתה מוגדרת היטב: ישנן <u>מספר</u> הצגות שונות של אותו וקטור.)

2) T <u>לינארית</u>:

$$v=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n \quad \text{הצגה לפי}$$

הצגה לפי B: $u = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$

$$\Downarrow$$

הצגה לפי B: $v+\lambda u = (\alpha_1+\lambda\beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_n+\lambda\beta_n)v_n$

לכן לפי הגדרת T:

$$T(v+\lambda u) = (\alpha_1+\lambda\beta_1)w_1 + \dots + (\alpha_n+\lambda\beta_n)w_n =$$

$$=(\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n) + \lambda(\beta_1 w_1 + \dots + w_n) =$$

$$= Tv + \lambda Tu$$

הוכחנו שקיימת הע"ל $T:V\to W$ המקיימת:

$$(*) \quad Tv_1 = w_1, \dots, Tv_n = w_n$$

יחידות T?

נניח כי S הע"ל המקיימת $(*)$ גם, ונראה כי $T=S$.

יהא $v\in V$ ניקח הצגה של v כצ"ל של $B=\{v_1,\dots,v_n\}$:

$$V = \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

מתקיים:

$$Tv \underset{T\text{ ל"ל}}{=} \alpha_1 Tv_1 + \dots + \alpha_n Tv_n \underset{\text{מהגדרת }T}{=} \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$$

$||$

נארית.

את תנאי ①

$$S_v = \alpha_1 S_{v_1} + \dots + \alpha_n S_{v_n} = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$$

S לינארית

S מקיימת את תנאי ②

קיבלנו שלכל $v \in V$: $Tv = Sv$, כלומר $T = S$.

מ.ש.ל.

דוגמה:

① האם קיימת ה"ל $T: \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^2$ המקיימת:

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} ?$$

לפי משפט ההגדרה, כיון ש- $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ בסיס

יש העתקה יחידה. (בודקים שאכן בסיס...)

② מה לגבי:

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\ \dots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}-1\\-1\\ \dots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} ?$$

אבל קודם:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

אילו היתה ה״ל לינארית כזו:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

סתירה. לכן, לא קיימת ה״ל כזו!