

אינפי 1 – תרגיל 5

1. תהי $\{b_n\}$ סדרה יורדת. הוכח ש $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$
2. תהי $\{a_n\}$ סדרה המתכנסת ל $L > 0$. הוכח ש $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \sqrt{L}$
3. הוכח/הפוך: $\{a_n\}$ מתכנסת $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$
4. תהי $\{a_n\}$ סדרה המקיימת $|a_n| \leq 2$ וגם $|a_n^2 - a_{n+1}^2| \leq \frac{1}{5} |a_n - a_{n+1}|$. הוכח שהסדרה מתכנסת.
5. תהי הסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$, ונתון $a_1 = c > 0$
 - a. עבור אילו ערכי c הסדרה מונוטונית עולה? יורדת?
 - b. עבור אילו ערכי c הסדרה מתכנסת?
 - c. מה גבול הסדרה עבור ערכי c מהסעיף הקודם?
6. תהי $\{a_n\}$ סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$ ונתון $a_1 > 0, c > 0$
 - a. עבור אילו ערכים של a_1 הסדרה מונוטונית עולה? יורדת? (רמז: נניח x מקיים $x = \sqrt{c + x}$, מה קורה כאשר $a_n < x$?)
 - b. עבור הערכים שמצאת בסעיף הקודם, האם הסדרה מתכנסת?
 - c. מה גבול הסדרה כאשר היא מתכנסת? האם יכולת לענות על סעיף זה לפני הסעיפים הקודמים?
7. מצא את כל הפתרונות של המשוואה $x = \sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + x}}}$ (רמז: תתי סדרות של סדרה מתכנסת שואפים לגבול שלה)
8. תהי $\{a_n\}$ סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ ונתון $a_1 > 0$. הוכח ש $\{a_n\}$ אינה חסומה. (רמז: הראה שהיא מונוטונית קודם כל).
9. תהי $\{a_n\}$ סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n + (-1)^n \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n n!} \right)$ ו $a_1 = 13$. הוכח כי הסדרה מתכנסת.