אלגברה מופשטת 3 – תרגיל 3

1. מצאו את הפולינום המינימלי של $\rho_5 = cis(2\pi/5)$ מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

2. הוכיחו ש $F(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = F(\sqrt{a},\sqrt{b})$ כאשר $a,b\in F$ ומתקיים $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq 0$ וגם $1+1\neq 0$ ב F (כלומר F ממאפיין $\neq 2$).

3. הראו $\mathbb{Q}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{-7}}{2}}+\sqrt{\frac{3-\sqrt{-7}}{2}}\right)\neq\mathbb{Q}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{-7}}{2}},\sqrt{\frac{3-\sqrt{-7}}{2}}\right)$. מהי דרגת ההרחבה מעל $\mathbb{Q}$ בכל אחד מהצדדים?

4. מצאו $a\in\mathbb{C}$ כך ש $\mathbb{Q}(a)=\mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt{-3},\sqrt{-1})$.

5. הראו שאם $a,b\in\mathbb{Z}$ זרים ואינם ריבועים, אזי $[\mathbb{Q}[\sqrt{a},\sqrt{b}]:\mathbb{Q}]=4$.

6. א. הוכיחו שאם F שדה סופי אזי $F^*=F-\{0\}$ חבורה ציקלית.

ב. הראו שאם F שדה אינסופי אזי $F^*=F-\{0\}$ לעולם אינה חבורה ציקלית (רמז: חלקו למקרים של מאפיין 0 או מאפיין p>0. אם המאפיין p>0 הניחו בשלילה ש $F^*=<u>$ וחלקו למקרים בהם u טרנסנדנטי או אלגברי מעל שדה הבסיס $\mathbb{F}_p$).

בונוס: הוכיחו או הפריכו: כל תת-שדה של $\mathbb{C}$ סגור להצמדה מרוכבת.