

אלגברה מופשטת 3 – תרגיל 3

1. מצאו את הפולינום המינימלי של  $\rho_5 = cis(2\pi/5)$  מעל  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ .

2. הוכיחו ש  $F(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = F(\sqrt{a}, \sqrt{b})$  כאשר  $a, b \in F$  ומתקיים  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq 0$  וגם  $1+1 \neq 0$  ב  $F$  (כלומר  $F$  ממאפיין  $2 \neq 0$ ).

3. הראו  $\mathbb{Q}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{-7}}{2}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{-7}}{2}}\right) \neq \mathbb{Q}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{-7}}{2}}, \sqrt{\frac{3-\sqrt{-7}}{2}}\right)$  מהי דרגת ההרחבה מעל  $\mathbb{Q}$  בכל אחד מהצדדים?

4. הראו שאם  $a, b \in \mathbb{Z}$  זרים ואינם ריבועים, אזי  $[\mathbb{Q}[\sqrt{a}, \sqrt{b}]: \mathbb{Q}] = 4$ .

5. מצאו  $a \in \mathbb{C}$  כך ש  $\mathbb{Q}(a) = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{-3}, \sqrt{-1})$ .

6. א. הוכיחו שאם  $F$  שדה סופי אזי  $F^* = F - \{0\}$  חבורה ציקלית.

ב. הראו שאם  $F$  שדה אינסופי אזי  $F^* = F - \{0\}$  לעולם אינה חבורה ציקלית (רמז: חלקו למקרים של מאפיין 0 או מאפיין  $p > 0$ . אם המאפיין  $p > 0$  הניחו בשלילה ש  $F^* = \langle u \rangle$  וחלקו למקרים בהם  $u$  טרנסנדנטי או אלגברי מעל שדה הבסיס  $\mathbb{F}_p$ ).

בנוסף: הוכיחו או הפריכו: כל תת-שדה של  $\mathbb{C}$  סגור להצמדה מרוכבת.