שיעורי בית 8

29 בדצמבר 2015

1. תהא G חבורה ו $H \trianglelefteq G$ תת חבורה נורמלית. הוכח/הפרך
   (א) אם G ציקלית גם G/H ציקלית.
   (ב) אם G/H ציקלית גם G ציקלית.

2. נתון: $H_2 \trianglelefteq G_2$ וגם $H_1 \trianglelefteq G_1$. הוכח:
   (א) $(H_1 \times H_2) \trianglelefteq (G_1 \times G_2)$
   (ב) $(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \cong (G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$

3. תהא G חבורה ו $N, K \trianglelefteq G$ שתי תתי חבורה נורמליות המקיימות $N \cap K = \{e\}$.
   הוכיחו כי
   $$\forall x \in N, y \in K : xy = yx$$
   [הדרכה: התבוננו ב $x^{-1}y^{-1}xy$]

4. תהא G חבורה ו $N \trianglelefteq G$ תת חבורה נורמלית המקיימת $|{}^{G}/_{N}| = p$ כאשר p מספר ראשוני.
   (א) הוכיחו לכל $g \in G - N$ מתקיים כי $g, g^2, \dots g^p$ נציגים של מחלקות שונות ב ${}^{G}/_{N}$ (ולכן ${}^{G}/_{N} = \left\{g^i N \,:\, 1 \le i \le p\right\}$)
   (ב) הוכיחו כי אם בנוסף $N \subseteq Z(G)$ (כלומר N מוכלת במרכז של G) אזי G חבורה חילופית (או מילים אחרות $Z(G) = G$).

5. תהא G חבורה חילופית. נגדיר $D = \{(g,g) \,:\, g \in G\} \subseteq G \times G$. הוכיחו כי זהוי תת חבורה נומאלית של $G \times G$ והראו כי
   $$^{G \times G}/_{D} \cong G$$

6. תהא G_1, G_2 שתי חבורות עם סדרים זרים (כלומר $\gcd(|G_1|, |G_2|) = 1$). הוכיחו כי קיים הומו' אחד $\phi : G_1 \to G_2$ [רמז: חישבו על התמונה $\phi(G_1)$]

7. נגדיר $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ מעגל היחידה עם פעולת כפל . הוכיחו כי

   (א) $G \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ [הדרכה: השתמשו בפונקציה $e^{2\pi xi}$]

   (ב) נגדיר $H \leq G$ להיות כל שורשי היחידה מסדר כלשהו. כלומר

   $$H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

   כאשר $U_n = \{z \in G : z^n = 1\}$ הם שורשי היחידה מסדר n.
   בעזרת סעיף קודם, הראו כי H איזומורפית ל $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$