פתרון מבחן מועד א' – חדו"א 1 - 06/02/19

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^{10}\right)e^{\sin(7x)}}{\left(1-\cos(5x)\right)^5}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^{10}\right)e^{\sin(7x)}}{\left(1-\cos(5x)\right)^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^{10}\right)}{x^{10}}\cdot\left(\frac{(5x)^2}{1-\cos(5x)}\right)^5\frac{e^{\sin(7x)}}{5^5}=1\cdot 2^5\cdot\frac{1}{5^5}$$

ב. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(x^2\right)}{x}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(x^2\right)}{x}=0$ כיוון שהמונה חסום והמכנה שואף לאינסוף.

ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{n^n}$

נשתמש בכלל המנה (מדובר בסדרה חיובית),

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left((n+1)!\right)^2}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{(n!)^2}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n(n+1)\to\frac{1}{e}\cdot\infty=\infty$$

כיוון ש**גבול** המנה גדול מ1, הסדרה המקורית שואפת לאינסוף.

2. נתונה הסדרה הבאה ע"י כלל נסיגה $a_{n+1}=\frac{1+a_n}{2}$ ונתון כי $a_1>0$.

א. מצאו ערך של a_1 עבורו הסדרה עולה.

ראשית, על מנת ש $a_2 \ge a_1$ צריך ש $\frac{1+a_1}{2} \ge a_1$ ולכן $a_1 \le 1$.

כעת נוכיח באינדוקציה שתנאי זה הוא מספיק.

יהי n עבורו $a_n \le a_{n+1}$, נוכיח כי $a_{n+1} \le a_{n+2}$.

צ"ל כי $\frac{1+a_{n+1}}{2} \le \frac{1+a_n}{2}$ וזה נובע בקלות מהנחת האינדוקציה $a_n \le a_{n+1}$ (מוסיפים 1 ומחלקים ב2).

ב. עבור הערך שמצאתם בסעיף א', הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

כיוון שהסדרה עולה, אם היא חסומה היא מתכנסת לגבול סופי $a_n \to L$.

כיוון ש $\lim a_{n+1} = \lim \frac{1+a_n}{2}$ נקבל כי $L=\frac{1+L}{2}$ ולכן $L=1$.

כלומר, אם הסדרה חסומה היא עולה ומתכנסת ל1, ולכן 1 יהיה החסם שלה.

נוכיח כעת באינדוקציה שזה אכן המצב.

בחרנו בסעיף הקודם $a_1 \le 1$, וצ"ל שלכל n מתקיים כי $a_n \le 1$

בסיס האינדוקציה מיידי כיוון שבחרנו את האיבר הראשון כך ש $a_1 \le 1$.

יהי n עבורו $a_n \le 1$ צ"ל $a_{n+1} \le 1$

אכן, $a_{n+1}=\frac{1+a_n}{2} \le \frac{1+1}{2}=1$. לכן הוכחנו שהסדרה עולה וחסומה ומתכנסת לגבול סופי, וגבולה הוא 1.

3. נביט בפונקציה $f(x)=\begin{cases}\sin(x)+a^2 & x\ge 0\\ ax+1 & x<0\end{cases}$

א. לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x=0$?

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sin(x)+a^2=a^2$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} ax+1=1$$
$$f(0)=a^2$$

לכן על מנת שהפונקציה תהא רציפה באפס, נובע כי הגבולות החד צדדיים שווים לערך בנקודה, ולכן $a^2=1$

כלומר $a=\pm 1$.

ב. לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x=0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלה?

אם הפונקציה אינה רציפה היא וודאי אינה גזירה, לכן עלינו לבדוק את שני המקרים $a=\pm 1$.

עבור $a=1$ נקבל

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)+1-1}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1-1}{x}=1$$

לכן הפונקציה גזירה באפס במקרה זה ונגזרתה שווה 1.

עבור $a=-1$ נקבל

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)+1-1}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x+1-1}{x}=-1$$

ולכן הפונקציה אינה גזירה במקרה זה.

4. יהי מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x^{2n+1}+x=1$.

נעביר אגף ונבנה פונקציה $h(x)=x^{2n+1}+x-1$.

נגזור את הפונקציה ונקבל $h'(x)=(2n+1)x^{2n}+1>0$ ולכן h עולה לכל x ויש לכל היותר חיתוך אחד עם ציר האיקס.

כעת נציב שתי נקודות $\begin{matrix} h(0)=-1<0 \\ h(1)=1>0 \end{matrix}$, כיוון שהפונקציה רציפה כצירוף אלמנטריות, לפי משפט ערך הביניים היא חותכת את הציר.

סה"כ יש בדיוק חיתוך אחד עם ציר האיקס, ולכן פתרון אחד למשוואה המקורית.

ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x^4+x=n$.

נעביר אגף ונבנה פונקציה $h(x)=x^4+x-n$

נגזור את הפונקציה ונקבל $h'(x)=4x^3+1$.

הנגזרת חיובית לכל $x>\frac{-1}{\sqrt[3]{4}}$ ולכן הפונקציה עולה בתחום $\left[\frac{-1}{\sqrt[3]{4}},\infty\right)$ ובאופן דומה הנגזרת שלילית לפני וכן ולכן הפונקציה יורדת בתחום $\left(-\infty,\frac{-1}{\sqrt[3]{4}}\right]$.

לכן המינימום של הפונקציה מתקבל בנקודה $x=\frac{-1}{\sqrt[3]{4}}$.

כיוון ש $h(x)=x(x^3+1)-n$ נובע כי $h\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{4}}\right)=\frac{-1}{\sqrt[3]{4}}\left(-\frac{1}{4}+1\right)-n<0$

כמו כן נחשב גבולות בקצוות $\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^4\left(1+\frac{1}{x^3}-\frac{n}{x^4}\right)=\infty$.

לכן יש נקודה בה הפונקציה חיובית לפני $x=\frac{-1}{\sqrt[3]{4}}$ ונקודה בה הפונקציה חיובית אחרי $x=\frac{-1}{\sqrt[3]{4}}$.

הפונקציה רציפה כצירוף אלמנטריות ולכן לפי ערך הביניים נקבל שתי נקודות חיתוך עם הציר.

כיוון שבתחום העלייה ובתחום הירידה יש לכל היותר חיתוך אחד בכל תחום, סה"כ נקבל בדיוק שתי נקודות חיתוך עם הציר ולכן בדיוק שני פתרונות למשוואה המקורית.

5. תהיינה פונקציה f הגזירה בכל הממשיים.

א. נניח כי $f(0)<f(1)$ וגם $f(2)<f(1)$, הוכיחו כי קיימת נק' בה $f'=0$.

נניח כי $f(0)\le f(2)$ ההוכחה במקרה ההפוך דומה.

לפי ערך הביניים, כיוון ש $f(0)\le f(2)<f(1)$ קיימת נקודה $c\in[0,1)$ עבורה $f(c)=f(2)$

לכן לפי משפט רול, קיימת נקודה בקטע $(c,2)$ בה הנגזרת מתאפסת.

ב. נניח כי לכל $x>0$ מתקיים כי $f(x)>f(0)$, הוכיחו/הפריכו: לכל $x>0$ מתקיים $f'(x)\ge 0$.

הפרכה: רעיונית הפונקציה יכולה לעלות, ואז לרדת.

דוגמא, $f(x)=\sin^2(x)+\frac{x}{2}$.

ברור שלכל $x>0$ מתקיים כי $f(x)\ge x>0=f(0)$

אך $f'(x)=\sin(2x)+\frac{1}{2}$ ולא מתקיים כי $f'(x)\ge 0$ לכל $x>0$.