תרגול 13-

תרגול חזרה

חוב משיעור קודם:

המטריצה הנלווית (adjoint):

הגדרה: תהא $A\in F^{n\times n}$ סוג. $\quad adj(A) = (b_{ij}) = \left((-1)^{i+j}|M_{ji}|\right)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

חשב את - $\underbrace{adj(A)}_{B}$ לפי הגדרה:

$$B_{1,1} = (-1)^{1+1}\cdot|M_{1,1}| = (-1)^2\cdot\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

$$B_{1,2} = (-1)^{1+2}\cdot|M_{2,1}| = (-1)^3\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$B_{1,3} = (-1)^{1+3}\cdot|M_{3,1}| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

שאר האיברים מחושבים באופן דומה.
שיעורי בית

משפט קרמר:

נתונה מערכת משוואות $Ax=b$ עבור מטריצה ריבועית A מסדר n אשר הדטרמיננטה שלה לא מתאפסת. אזי- הפתרונות $x_1,\dots,x_n$ של המערכת מקיימים -
כאשר A_i מתקבלת ע"י מחיקת העמודה ה-i ב-A והצבת העמודה ה-b במקומה.

$$x_i=\frac{|A_i|}{|A|}$$

דוג:

I) $x+y+z=1$

II) $2y+3z=2$

III) $x+z=3$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&3\\1&0&1\end{vmatrix}=3 \qquad |A_1|=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&3\\3&0&1\end{vmatrix}=3 \Rightarrow \boxed{x_1}=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{3}{3}=\boxed{1}$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&3\\1&3&1\end{vmatrix}=-6 \qquad y=\frac{-6}{3}=\boxed{-2}$$

$$|A_3|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&2\\1&0&3\end{vmatrix}=6 \Rightarrow z=\frac{6}{3}=\boxed{2}$$

תרגיל ממבחן:

יהי: $T: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י לכל $p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ כדלהלן- $T(p(x)) = p(0)$

יהי: $S: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_3[x]$ העתקה המוגדרת ע"י לכל $a \in \mathbb{R}$ כדלהלן: $S(a) = a(x^3+1)$

הוכח/הפרך:

א) S חח"ע

ב) $\dim(\ker T) = 3$

נפתור קודם את ג ואז את ב

ג) $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}$

ד) אם $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ אז $tr([S \circ T]_B) = 0$

פתרון:

ב) הוכחה: נניח - $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$ ונרצה להראות כי:

$$S(\alpha\cdot a+b)=\alpha\cdot S(a)+S(b)$$

נחשב את 2 האגפים, אגף שמאל:

$$S(\alpha\cdot a+b)=(\alpha\cdot a+b)(x^2+1)$$

אגף ימין:

$$\alpha S(a)+S(b)=\alpha\cdot a(x^2+1)+b(x^2+1)=(\alpha a+b)(x^2+1)$$

ולכן - מתקיים.

ג) הוכחה: לכל $a\in\mathbb{R}$ ניקח את הפולינום הקבוע $p(x)\equiv a$ ונקבל כי $T(p(x))=p(0)=a$

ולכן - T על ולכן: $ImT=\mathbb{R}$

ד) לפי משפט הדרגה

הוכחה

$$\dim\ker(T)+\underbrace{\dim(ImT)}_{1}=\underbrace{\dim(\mathbb{R}_3[x])}_{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dim(\ker T)}=4-1=\boxed{3}$$

$$S\circ T(a+bx+cx^2+dx^3)=S(a)=a(x^3+1)$$

ה) מסקנה

$$[S\circ T]_B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow tr([S\circ T]_B)=1$$

שאלה ממבחנים

שאלה 3:

נגדיר הטל $R:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ ליניארית -

$$R(x,y,z,w)=(x+y+2z,\ -y-z+w,\ 2x+2z+w,\ y+z-w)$$

$$V=\{T\in \mathrm{Home}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^4) : TR=0\}$$

א) מצאו - גרעין ותמונת R.

ב) הוכיחו - כי V תמ"ו של $\mathrm{Home}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^4)$

(ג) מציאת גרעין ותמונה: נמצא את המטריצה המייצגת של R לפי הבסיס הסטנדרטי. $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

$R(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad R(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad R(e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad R(e_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$[R]_S^S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Leftarrow$$

$$\ker(R) = N([R]_S^S)$$

נדרג כך - נדרג את המטריצה ונקבל -

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{(מדרגים לשורה)}} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & w \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$z = t \quad w = s$

פתרון - נמצא פתרון כללי למערכת:

$y + t - s = 0 \qquad x + t + s = 0$

$\boxed{y = -t + s} \qquad \boxed{x = -t - s} \quad \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -t-s \\ -t+s \\ t \\ s \end{pmatrix} \middle| \, t, s \in \mathbb{R} \right\}$

$$\ker R = sp\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Leftarrow$$

$$Im(R) = C([R]_S^S)$$

נמצא בסיס לתמונה התמונות ← העמודות עם איברים מובילים הן:

$$Im R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

שאלות ממבחנים

שאלה 3:

תהי ה"ל $R: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ שמוגדרת-

$R(x,y,z,w) = (x+y+2z, -y-z+w, 2x+2z+2w, y+z-w)$

ומן-

$V = \{T \in Home(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) : TR = 0\}$

א) מצאו- גרעין ותמונת R.

ב) הוכיחו- כי V תת"מ של $Home(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$

ב) נוכיח שמתקיימים תנאי קריטריון מקוצר: לתמ"ו:

ברור כי הקבוצה (אוסף) קבוע?.

נותר להראות סגירות לחיבור וכפל בסקלר - יהיו - $T,S \in V$, $\alpha \in R$

$$(T+\alpha S)R = \underbrace{TR}_{0} + \alpha \underbrace{SR}_{0} = 0+\alpha\cdot 0 = 0+0 = 0$$

ולכן - מתקיים.

- **תרגיל:** הוכיחו שאם קיימים $a_1,\dots,a_k$ סקלרים כך שמתקיים $I+a_1A+a_2A^2+\dots+a_kA^k=0$ אז המטריצה A הפיכה

תרגיל: הוכיחו שאם קיימים סקלרים $a_1,\dots,a_k$ כך שמתקיים

$$I+a_1A+a_2A^2+\dots+a_kA^k=0$$

אז- המטריצה A הפיכה

פתרון:

$$I+a_1A+a_2A^2+\dots+a_kA^k=0 \Leftarrow$$

$$I=-a_1A-a_2A^2-\dots-a_kA^k$$

$$I=A(-a_1-a_2A-\dots-a_kA^{k-1})$$

$\Leftarrow$ $\boxed{A \text{ הפיכה}}$

שאלה 4:

V מ"ו ממימד סופי. $T:V\to V$ הל"ל. הוכיחו/הפריכו - כל 1 מהטענות הבאות:

א) $\operatorname{span}(\ker T \cup \operatorname{Im} T) = V$

ב) $\operatorname{span}(\ker T \cup \operatorname{Im} T) = \ker T + \operatorname{Im} T$

ג) $\operatorname{span}(\ker T \cup \operatorname{Im} T) = \ker T \cup \operatorname{Im} T$

ד) $\operatorname{span}(\ker T \cup \operatorname{Im} T) = \ker T \oplus \operatorname{Im} T$

פתרון:

א) $\boxed{\text{לא נכון}}$ דוגמה נגדית: V מ"ו ממימד 2 עם בסיס $\{v,u\}$ לפי משפט ההג' לה"ל נגדיר

$T: V \to V$
$T(v) = u$
$T(u) = 0$

$\Leftarrow \quad \ker T = \operatorname{span}\{u\} \qquad \operatorname{Im} T = \operatorname{span}\{u\}$

$$\ker T \cup \operatorname{Im} T = \operatorname{span}\{u\}$$

$\ne V$ ממימד שונה.

וגם- אופרטור אחר: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} \ker T &= sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ \operatorname{Im} T &= sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ker T \cup \operatorname{Im} T = sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \ne V$$

ב) $\boxed{\text{נכון}}$ - הוכחנו ב-1 התרגולים הקודמים של span כי - לכל U,W תמ"ו של V

מתקיים: $span(U \cup W) = U + W$ ובפרט עבור $U = \ker T$

$W = \operatorname{Im} T$

ג) $\boxed{\text{לא נכון}}$ דוג' נגדית: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\ker T = span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\} \qquad \operatorname{Im} T = span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\ker T \cup \operatorname{Im} T = \underbrace{\overset{\text{ציר}}{x} \cup \overset{\text{ציר}}{y}}_{\text{לא מכיל וקטור}}$$

מהצורה $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$!

ולכן - $span(\ker T \cup \operatorname{Im} T) = span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$ וברור שמכיל

וקטור זה.

2) $\boxed{\text{לא נכון}}$ נסתכל על ההעתקה

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\ker T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -z \\ z \end{pmatrix} \middle|\; x, z \in \mathbb{R} \right\} = sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$y = -z$

$$\operatorname{Im} T = sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Longrightarrow \ker T \cap \operatorname{Im} T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ולכן - $\ker T \cap \operatorname{Im} T \neq \{0\}$

$\Leftarrow$ סתירה

שאלה 7: (2000 מועד א') הוכח/הפרך:

יהי $\mathbb{F}$ שדה כלשהו ותהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אזי:

א) אם המטריצה אינה מטריצת האפס אך מקיימת $rank(A)=rank(A^2)$ אזי A הפיכה.

ב) אם קיימת מטריצה $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש- AB הפיכה ⇐ A הפיכה

ג) אם לכל $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ שאינה הפיכה, גם AB לא הפיכה ⇐ A לא הפיכה.

שאלה 7: (2000 מועד א') הוכח/הפרך:

יהי $\mathbb{F}$ שדה כלשהו ותהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אזי:

א) אם המטריצה אינה מטריצת האפס אך מקיימת $rank(A)=rank(A^2)$ אזי A הפיכה.

ב) אם קיימת מטריצה $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש- AB הפיכה $\Leftarrow$ A הפיכה

ג) אם לכל $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ שאינה הפיכה, גם AB לא הפיכה $\Leftarrow$ A לא הפיכה.

פתרון:

א) $\boxed{\text{לא נכון}}$ דוגמא נגדית: $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ לא הפיכה $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\Leftarrow$ $A^2=A$ וברור כי $rank(A)=rank(A^2)$

ב) $\boxed{\text{נכון!}}$ אם AB הפיכה אזי (כפליות) $det(AB)=det(A)det(B)\neq 0$

$\Leftarrow$ $det(A)\neq 0$ $\Leftarrow$ A הפיכה.

ג) $\boxed{\text{לא נכון}}$ - דוגמא נגדית: $A=I$ $B=0$ לא הפיכה $AB=0$ לא הפיכה וברור כי A הפיכה.

שאלה 2:

נתונה המטריצה $\begin{pmatrix}1 & i & 1\\ 1 & z & 1\\ i & -1 & z\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ סמנו:

א) לכל $z\in\mathbb{C}$ דרגת המטריצה היא 3.

ב) לכל $z\in\mathbb{C}$ המטריצה לא הפיכה.

ג) קיים $z\in\mathbb{C}$ יחיד - דרגת המטריצה היא 2.

ד) קיים $z\in\mathbb{C}$ יחיד - דרגת המטריצה היא 1.

שאלה 2:

נתונה המטריצה $\begin{pmatrix}1 & i & 1\\ 1 & z & 1\\ i & -1 & z\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ סמנו -

א) לכל $z\in\mathbb{C}$ דרגת המטריצה היא 3.

ב) קיים $z\in\mathbb{C}$ עבורו - דרגת המטריצה היא 2.

ג) לכל $z\in\mathbb{C}$ המטריצה לא הפיכה.

ד) קיים $z\in\mathbb{C}$ עבורו - דרגת המטריצה היא 1.

פתרון:

בעזרת - נדרג

$$\begin{pmatrix}1 & i & 1\\ 1 & z & 1\\ i & -1 & z\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3=R_3-iR_1]{R_2=R_2-R_1} \begin{pmatrix}1 & i & 1\\ 0 & z-i & 0\\ 0 & 0 & z-i\end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{עבור } z=i}$ נקבל את המטריצה $\begin{pmatrix}1 & i & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ ברור שדרגת המטריצה $1 \neq 3$

ולכן - א) $\boxed{\text{לא נכון}}$

ד) $\boxed{\text{נכון}}$ עבור $z=i$

ב) $\boxed{\text{לא נכון}}$ ראינו שלכל $z\neq i$ ישנם 3 איברים מובילים ולכן הפיכה ומכאן דרגתה $2\neq 3$.

ג) $\boxed{\text{לא נכון}}$ ~~[illegible]~~ עבור $z\neq i$ המטריצה הפיכה.

המשך תרגול:

נתונים $A,B\in F^{n\times n}$ אזי -

א) $rank(AB)=rank(BA)$

ב) $rank(A+B)\le rank(A)$

ג) $rank(A\cdot B)\le rank(A+B)$

הוכח/הפרך.

(2)

המשך תרגול:

תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש-

א) $\text{rank}(AB)=\text{rank}(BA)$

ב) $\text{rank}(A+B)\leq\text{rank}(A)$

ג) $\text{rank}(A\cdot B)\leq\text{rank}(A+B)$

הוכח/הפרך.

פתרון:

א) $\boxed{\text{לא נכון}}$ דוג' נגדית: $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\text{rank}(AB)=0$$

$$\neq$$

$$BA=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\text{rank}(BA)=1$$

ב) $\boxed{\text{לא נכון}}$ דוג' נגדית: $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$A+B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\underbrace{\text{rank}(A+B)}_{=2}$$

$$\text{rank}(A)=0$$

ג) $\boxed{\text{לא נכון}}$ & דוג' נגדית: $A=I_{2\times2}$ $B=-I_{2\times2}$

$$A+B=I-I=0\Rightarrow\text{rank}(A+B)=0$$

$$A\cdot B=-I\cdot I=-I\Rightarrow\text{rank}(A\cdot B)=2$$

מבחן של הגדרות:

נתונה מערכת $Ax=b$ לא הומוגנית ב-3 נעלמים.

א) צ״ל- הפרש 2 פתרונות למערכת הנ״ל הוא פתרון למערכת ההומוגנית הנוצרת ממנה.

ב) אם- $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix}$ פתרונות למערכת הלא הומוגנית קבע

צ״ל- $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ <u>לא</u> פתרון למערכת ההומוגנית הנוצרת ממנה.

מבחן של הבגרות:

נתונה מערכת $Ax=b$ לא הומוגנית ב-3 נעלמים.

א) הוכח - הפרש 2 פתרונות למערכת הנ"ל הוא - פתרון למערכת ההומוגנית הנגזרת ממנה.

ב) אם - $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix}$ פתרונות למערכת הלא הומוגנית הנ"ל

הוכח - $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ לא פתרון למערכת ההומוגנית הנגזרת ממנה.

פתרון:

א) יהיו v_1,v_2 פתרונות של $Ax=b$ ונרצה להראות כי v_1-v_2 פתרון של $Ax=0$

$$A(v_1-v_2)=Av_1-Av_2=b-b=0$$

וכך - מתקיים. ✓

ב) נניח ש $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ מתקיים:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix}$$

כעת - נרצה לחשב את $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=A\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix}\right)=A\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}-A\begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix}=b+b-b=b\neq 0$$

ואז שזה לא הומוגני

ולכן - זה לא פתרון להומוגנית.

מבחן באלגברה ליניארית תשפ"ג מועד א:

תהי $T: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}_3[x]$ המוגדרת ע"י -

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a-b+c) + (b+c-d)x + (a+2c-d)x^2 + (a-2b+d)x^3$$

U - ת"מ של ב המטריצות הסימטריות.

ב) מצאו - בסיס ומימד לגרעין ההעתקה.

$(a \; b)$ $\mathbb{R}^{2\times 2}$

מצאו גרעין ותמונה להעתקה מוגדרת כך:

תהי $T:\mathbb{R}^{2\times 2}\to \mathbb{R}_3[x]$ מוגדרת ע"י -

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\right)=(a-b+c)+(b+c-d)x+(a+2c-d)x^2+(a-2b+d)x^3$$

U - תמונה של T במרחבים הסטנדרטיים.

א) מצאו - בסיס ומימד לגרעין ההעתקה.

פתרון KerT:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in \mathbb{R}^{2\times 2} \Rightarrow a-b+c=b+c-d=a+2c-d=a-2b+d=0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(\dots)]{\text{מדורגת}}$$

משתנים חופשיים

כללי ...

$$\{(t-2s,\ t-s,\ s,\ t)\mid s,t\in\mathbb{R}\}$$

$$\Leftarrow \boxed{B_{KerT}=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}}$$

$$\boxed{\dim(KerT)=2}$$

5) מצאו ה״ש ומשל לתיאור ההעתקה

ג) נמצא ב"ס ומימד לתמונת ההעתקה

נשים ♡ כי התמונה נפרשת ע"י תמונות של איברי בסיס

$T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=1+x^2+x^3$ $\quad T\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=-1+x-2x^3$ $\quad T\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=1+x+2x^2$

$T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=-x-x^2+x^3$

כמו-כן נשים לב כי לפי משפט הדרגה

$\underbrace{\dim\ker T}_{2}+\dim\operatorname{Im}T=4 \Rightarrow \boxed{\dim\operatorname{Im}T}=4-2=\boxed{2}$

לכן-מספיק לנו למצוא 2 וקטורים בת"ל ונקבל ב"ס מאפסים אותו.

$\operatorname{Im}T=sp\{1+x^2+x^3,\ -1+x+2x^3\}$

$B_{\operatorname{Im}T}=\{1+x^2+x^3,\ -1+x+2x^3\}$ ⇐

קורדינטות, נשים בעמודות נדרג
והעמודות עם האיברים המובילים לאחר
הדירוג הן הבת"ל שלנו במקורית

$\dim(U \cap \ker T) = ?$

$\dim(U + \ker T) = ?$

ג) מצאו -

$$\dim(U \cap \ker T) = ?$$

$$\dim(U + \ker T) = ?$$

נשים ♡ - בסיס למרחב המטריצות הסימטריות בגודל 2x2 יכול להיות (הוכחנו בתרגול קודם)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$ ומימדו - 3.

המטריצות של בסיס הגרעין שמצאנו קודם - לא כולן שייכות ל-U.

לכן $\dim(\ker T \cap U) < \dim(\ker T) = 2$

לכן יכול להיות שמימד החיתוך הוא 0.

$$\dim(U + \ker T) = \dim(U) + \dim(\ker T) - \dim(\ker T \cap U) = 3 + 2 = 5$$

אך זה לא ייתכן מכיוון ש- $U + \ker T \subseteq \underbrace{\mathbb{R}^{2\times 2}}_{\text{מימד } 4}$ לכן - $\dim(\ker T \cap U) = 1$

$$\dim(U + \ker T) = 3 + 2 - \dim(\ker T \cap U) = 4$$

שאלה: נתון: $T:V\to V$ הע"ל כך ש- $\dim\ker T = \frac{1}{3}\dim V$ יש להוכיח - קיים בסיס B למרחב
ג' שבמטריצה $[T]_B^B$ שליש מהשורות הן-שורות אפסים.

פתרון:

שאלה: נתון $T:V\to V$ הל"ל כך ש- $\dim\ker T=\frac{1}{3}\dim V$ יש להוכיח - קיים בסיס B למרחב כך שבמטריצה $[T]^B_B$ שליש מהשורות הן שורות אפסים.

פתרון:

לפי משפט המימדים נקבל - כי $\dim ImT=\frac{2}{3}\cdot\dim V$. נסמן - $\dim V=3k$

(זאת - כי מימד המרחב - כולו חייב להיות כפולה של 3. ניקח - בסיס ל- $ImT=\{v_1,\dots,v_{2k}\}$

ונשלים - לבסיס של V.

$B=\{v_1,\dots,v_{2k},v_{2k+1},\dots,v_{3k}\}$ נסתכל - על $[T]^B_B$: נשים ♡ - כי מכיוון ש- $T(v_i)\in ImT$

כל איבר - $T(v_i)$ ניתן להצגה כצ"ל של $\{v_1,\dots,v_{2k}\}$ ולכן - לכל $1\le j\le 3k$ נקבל -

$$T(v_j)=\alpha_{j1}v_1+\dots+\alpha_{j2k}v_{2k}+0\cdot v_{2k+1}+\dots+0\cdot v_{3k}$$

$\Leftarrow$ לכן - במטריצה המייצגת - שליש מהשורות (השליש התחתון) הן שורות אפסים.

בהצלחה!!!