תרגיל 9

1. הוכיחו: הטענה הבאה שקולה ללמה של צורן: אם $\langle A,<\rangle$ היא קבוצה סדורה חלקית לא ריקה שלכל שרשרת עולה בה יש חסם מלעיל, אז לכל $a\in A$ יש $b\in A$ מקסימלי כך ש: $a\le b$.

ראשית, נוכיח שהלמה של צורן גוררת את הטענה.

יהי $\langle A,<\rangle$ קס"ח לא ריק עם התכונה הנ"ל, ויהי $a\in A$. נסתכל על $B=\{c\in A: c\ge a\}$. זאת תת קבוצה לא ריקה של A. כל שרשרת עולה בB היא גם שרשרת עולה בA ולכן יש לה חסם מלעיל בA. נסמן אותו בx. נטען ש$x\in B$. הוכחה: לכל y בשרשת, $x\ge y$. אבל $y\in B$ ולכן $a\le y$. לכן $a\le x$.

קיבלנו שלכל שרשרת עולה בB יש חסם מלעיל בB, ולכן קיים איבר מקסימלי בB. כלומר, קיים איבר מקסימלי בA ביחס לתכונה שהוא גדול או שווה לa.

כיוון שני: יהי $\langle A,<\rangle$ קס"ח עם התכונה שלכל שרשרת עולה יש חסם מלעיל. נקח $a\in A$. מהנתון, יש $b\in A$ מקסימלי כך ש$a\le b$. נטען שb מקסימלי בA. אכן, אם יש $b\le c\in A$ אז $a\le c$ בסתירה לכך שb מקסימלי ביחס לתכונה שהוא גדול או שווה לa. סתירה.

2. הוכיחו: תהי $(P,<)$ קבוצה סדורה בסדר מלא. אזי יש בתוכה תת קבוצה קופינלית $A\subseteq P$ כך ש $(A,<)$ סדורה היטב.

פתרון:

תהי C קבוצת כל התתי קבוצות הסדורות היטב של P, עם יחס הסדר: $A_1<A_2$ אם A_1 רישא של A_2. $C\neq\emptyset$, כי יש בה למשל נקודונים מP. ראשית נוכיח שקיים לC איבר מקסימלי. לצורך כך, לפי הלמה של צורן, מספיק להוכיח שלכל שרשרת עולה בC יש חסם מלעיל. למעשה, הוכחנו בתרגול שאיחוד של שרשרת עולה של תת קבוצות סדורות היטב עם היחס שהגדרנו היא תת קבוצה סדורה הטב. ולכן אם $\{A_i\}$ שרשרת עולה בC, $\cup A_i$ הוא חסם שלה בC.

לכן יש בC איבר מקסימלי. נקרא לו A. טענה: A קופינלית בP.

הוכחה: אחרת יש $p\in P$ כך שלכל $a\in A$ $a\ngeq p$. מכיוון שP סדורה בסדר מלא, זה אומר ש $p>a$ לכל $a\in A$. אז $A\cup\{a\}$ היא תת קבוצה סדורה היטב שA היא רישא שלה. בסתירה למקסימליות של A.

3. הוכיחו את הלמה של תוכי:

תהי D קבוצה לא ריקה של קבוצות, כך ש $B\in D$ אמ"ם כל תת קבוצה סופית של B היא איבר בD. אזי, יש בD איבר מקסימלי ביחס להכלה.

פתרון: מספיק להוכיח שלכל שרשרת עולה בD (עבור יחס ההכלה) קיים חסם בD. ובכן, תהי $\{A_i\}$ שרשרת עולה בD. נסתכל על $\cup A_i$. ברור שהוא חסם של השרשרת עבור יחס ההכלה. צריך להוכיח שהוא שייך לD. לפי התנאי, מספיק להראות שכל תת קבוצה סופית שלו שייכת לD. תהי $B\subseteq\cup A_i$ סופית. $B=\{b_1,...b_n\}$. קיימים $i_i,...,i_n$ כך ש: $b_j\in A_{i_j}$. בה"כ $i_1<...<i_n$. מכיוון שהשרשרת עולה, $A_{i_1}\subseteq...\subseteq A_{i_n}$. לכן $B\subseteq A_{i_n}$. מהגדרת הקבוצה D, מאחר ו$A_{i_n}\in D$ וB תת קבוצה סופית שלו, אז $B\in D$. מש"ל.

4. הוכיחו שקיימת קבוצה S של מספרים ממשיים המקיימת:

א. לכל $a \neq b \in S$, $a-b$ אי רציונלי.

ב. לכל $a \notin S$ יש $b \in S$ כך ש $a-b$ רציונלי.

פתרון:

תהי D קבוצות כל תתי הקבוצות של $\mathbb{R}$ שמקיימות: $a-b \notin \mathbb{Q} \Longleftarrow a \neq b \in A$.
ראשית, D לא ריקה, כי יש בה למשל נקודונים. נוכיח שקיים בD איבר מקסימלי. ובכן, תהי $\{A_i\}$ שרשרת עולה בD (עם יחס ההכלה). צריך למצוא לה חסם מלעיל. ובכן, נקח את $\cup A_i$. ברור שהוא חסם של השרשרת. צריך להוכיח שהוא שייך לD. יהיו $a \neq b \in \cup A_i$. כלומר, קיימים i,j כך ש $a \in A_i, b \in A_j$. בה"כ $i<j$, לכן $A_i \subseteq A_j$, כלומר $a,b \in A_j$. $A_j \in D$ ולכן $a-b$ אי רציונלי.

מהלמה של צורן נקבל שקיים בD איבר מקסימלי, נסמנו בS.

יהי $a \notin S$. אם לכל $b \in S$ $a-b \notin \mathbb{Q}$, אז $S \subseteq S \cup \{a\} \in D$, בסתירה למקסימליות של S. 5. הוכיחו שאקסיומת הבחירה שקולה לטענה הבאה: לכל קבוצה S של קבוצות לא ריקות זרות בזוגות, קיימת $A \subseteq \bigcup S$ כך שלכל $x \in S$, $|A \cap x| = 1$. קבוצה כזאת נקראת "קבוצה בוחרת".

הוכחה:

$\Longleftarrow$ תהי $f : S \to \cup S$ פונקציית בחירה. $f[A]$ תעשה את העבודה.

$\Longrightarrow$ תהי S קובצה של קבוצות לא ריקות זרות בזוגות. ראינו בתרגול שמספיק לבנות פונקציית בחירה עבור קבוצה כזאת. ובכן, תהי A קבוצה בוחרת. נגדיר $f(x)$ שווה לאיבר היחיד ב$A \cap x$.

6. הוכיחו ישירות כי הלמה של צורן גוררת את אקסיומת הבחירה.

רמז: לפי התרגיל הקודם מספיק להוכיח שהלמה של צורן גוררת את הטענה הבאה:

לכל S קבוצה של קוצות לא ריקות וזרות בזוגות, קיימת $A \subseteq S$ כך ש $|A \cap X| = 1$ לכל $X \in S$.

הוכחה: נוכיח שקיימת תת קבוצה $A \subseteq \bigcup S$ ביחס לתכונה: $|A \cap X| \leq 1$ לכל $X \in S$. אם קיימת קבוצה כזאת, אז היא עונה על הדרישה. אכן, אם יש $X \in S$ כך ש $|A \cap X| = 0$ אז נבחר $x \in X$ ונסתכל על הקבוצה $A \cup \{x\}$. היא מכילה את A ממש, וכן, מכיוון שכל הקבוצות בS זרות, מקיימת גם היא את התכונה. בסתירה למקסימליות של A.

ובכן, נסמן בD את אוסף תתי הקבוצות של $\bigcup S$ שמקיימות את התכונה. $D \neq \emptyset$ כי $\emptyset \in D$. תהי $\{Y_i\}$ שרשרת עולה בD. נוכיח ש$\cup Y_i$ שייכת לD. נניח בשלילה שיש $X \in S$ כך ש $|(\cup Y_i) \cap S| \geq 2$ ויהיו x_1, x_2 בחיתוך. בפרט, $x_1, x_2 \in \cup Y_i$ כלומרת קיימים $i_1 i_2$ כך ש $x_1 \in Y_{i_1}$ ו $x_2 \in Y_{i_2}$. נניח בה"כ ש $i_1 < i_2$, אז $Y_{i_1} \subseteq Y_{i_2}$ לכן $x_1, x_2 \in Y_{i_2}$, בסתירה לכך ש$|Y_{i_2} \cap X| = 1$. לכן $\cup Y_i$ שייך לD. כלומר, לכל שרשרת עולה בD יש חסם מלעיל, ולכן מהלמה של צורן, יש בD איבר מקסימלי.

7. אחת מאקסיומות הנוספות השקולות לאקסיומת הבחירה היא "עיקרון המקסימום של האוסדורף" שאומר את הדבר הבא: בכל קבוצה סדורה חלקית לא ריקה קיימת שרשרת מקסימלית (ביחס להכלה). הוכיחו ישירות כי הלמה של צורן שקולה לעיקרון המקסימום של האוסדורף.

הוכחה:

$\Longleftarrow$ תהי A קבוצה לא ריקה. נגדיר את X להיות אוסף השרשראות המוכלות בA. X הינה קבוצה סדורה חלקית עם יחס סדר ההכלה. X אינה ריקה, כי כל נקודון שמוכל בA הוא למעשה שרשרת. נוכיח שלכל שרשרת בX יש חסם. ובכן, תהי $\{Y_i\}$ שרשרת בX. כלומר, כל Y_i הינו תת שרשרת של A, ולכן i,j מתקיים: $Y_i \subseteq Y_j \vee Y_j \subseteq Y_i$. ובכן, נקח $Y = \bigcup Y_i$. ברור שY הינו חסם של השרשרת, כי כל איבר בשרשרת מוכל בY. צריך

להוכיח שY הוא אכן איבר של X: היו $x,y\in Y$. $\exists i,j: x\in Y_i, y\in Y_j$. בה"כ $Y_i\subseteq Y_j$ ולכן $x,y\in Y_j$. Y_j הינה שרשרת, ולכן ניתן להשוות בין x לy. קיבלנו שבין כל שני איברים של Y ניתן להשוות, ולכן Y הינו שרשרת. מהלמה של צורן נקבל שקיים איבר מקסימלי בX, כלומר, קיימת שרשרת מקסימלית בA.

$\Longrightarrow$ תהי A קס"ח לא ריקה, שמקיימת את התנאי שכל שרשרת בA חסומה. רוצים להוכיח שיש בA איבר מקסימלי. מעיקרון המקסימום של האוסדורף, יש בA שרשרת מקסמלית, B. מההנחה, קיים איבר $a\in A$ שגדול שווה מכל איברי B. אם $a\notin B$, אז $B\cup\{a\}$ היא שרשרת שמכילה את B וזה סותר את המקסימליות. לכן $a\in B$. (a הוא המקסימום של השרשרת). נטען שa מקסימלי בA. אחרת, קיים $a<x\in A$, ו$B\cup\{x\}$ יהווה שרשרת שמכילה ממש את B, בסתירה למקסימליות של B.