

מתמטיקה בדידה – תרגיל 2

שאלה 1

תהיי X קבוצה. R נקרא חוג מעל X אם מתקיים:

א. $R \subseteq P(X)$

ב. $\emptyset \in R$

ג. $\forall A, B \in R$ מתקיים $(A \setminus B) \wedge (A \cup B) \in R$.

הוכיחו ש $\forall A, B \in R$ מתקיים $A \cap B \in R$.

שאלה 2

תהיינה A, B קבוצות. הוכיחו כי $A \times B = B \times A$ אם ורק אם $A = B$ או $A = \emptyset$ או $B = \emptyset$.

שאלה 3

תהיינה A, B קבוצות סופיות. נגדיר $n = |A|, m = |B|, k = |A \cap B|$. הביעו בעזרת n, m, k את גודלן של הקבוצות הבאות. נמקו את קביעתכם.

1. $A \cup B$

2. $P(A) \Delta P(B)$

3. $(A \cap B) \times (B \cup A)$

4. $(P(A) \setminus \{A\} \setminus \{\emptyset\}) \times B$

5. $(P(A) \times P(B)) \cup (P(A \cup B) \times P(A \cap B))$

שאלה 4

צינו לכל אחד מהיחסים הבאים אם הוא רפלקסיבי סימטרי או טרנזיטיבי. אם מדובר ביחס שקילות, מצאו את מחלקות השקילות שלו.

א. $R_1 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}, a < b\}$

ב. $R_2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}, a \leq b\}$

ג. $R_3 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}, a = b\}$

שאלה 5

נתונה הקבוצה A ואוסף תת-קבוצות שלה A_1, A_2, \dots, A_n נגדיר יחס R על A ע"י:

{קיים i עבורו $x \in A_i$ וגם $y \in A_i$ } : $R = \{(x, y) : y \in A_i \text{ וגם } x \in A_i\}$. הוכח או הפרך:

א. $R \Leftarrow \bigcup_{i=1}^n A_i = A$ רפלקסיבי.

ב. $R \Leftarrow \bigcup_{i=1}^n A_i = A$ רפלקסיבי.

ג. לכל $1 \leq i < j \leq n$ מתקיים: $R \Leftarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ רפלקסיבית.

ד. R טרנזיטיבי \Leftarrow לכל $1 \leq i < j \leq n$ מתקיים: $A_i \cap A_j = \emptyset$.

שאלה 6

תהי A קבוצה. יהיו S ו- R יחסי שקילות על A . הוכח או תן דוגמא נגדית לטענות הבאות:

א. $R \cup S$ יחס שקילות.

ב. $(A \times A) \setminus R$ יחס שקילות.

ג. $((A \times A) \setminus R) \cup I_A$ יחס שקילות.

ד. $R \setminus S$ יחס שקילות.

($I_A = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ אז $A = \{1,2,3\}$ לדוגמא אם)

שאלה 7

א. תהי $\{F_i\}_{i \in I}$ משפחת קבוצות. הוכיחו כי לכל $i \in I$ ($I \neq \emptyset$) מתקיים $\bigcap_{i \in I} F_i \subseteq F_i \subseteq \bigcup_{i \in I} F_i$.

ב. תהי X קבוצה ותהי $A \subseteq X$ כך ש- $A \neq \emptyset$. הוכיחו כי $\bigcap_{x \in X \setminus A} (X \setminus \{x\}) = A$.

שאלה 8

יהי E יחס שקילות על קבוצה A , ויהי F יחס שקילות על קבוצה B . תהי $G = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\} \mid (a_1, a_2) \in E, (b_1, b_2) \in F$. הוכח כי G הוא יחס שקילות על $A \times B$.

שאלה 9

יהי R יחס על הקבוצה \mathbb{N} כך שלכל $x, y \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$xRy \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{N}, x^m = y^n$$

א. הוכח כי R יחס שקילות.

ב. רשום במדויק את $[0]_R, [1]_R$ ו- $[49]_R$.