

חשבון אינפי 1 - תרגיל בית 5

סמסטר א', 2015-2016

16 בנובמבר 2015

- ענו על כל השאלות הבאות. את מספר השאלה אותה בחרתי שתגישו תדעו ב-24.11 בשעה 9:55.

הערה: כשאני כותב "הוכח או הפרך" זה קיצור של הניסוח: "קרא את הטענה הבאה. אם היא נכונה, כתוב לה הוכחה מלאה. אחרת, הבא לה דוגמה נוגדית והראה מדוע היא סותרת את הטענה".

1. הוכיחו או הפריכו: תהי $\{a_n\}$ סדרה אז קיימת לה תת סדרה מונוטונית.
2. תהי סדרה $a_n \rightarrow -\infty$. מצאו את $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$. שימו לב שבהרצאה עשיתם בדומה ומצאתם גבול זה עבור $a_n \rightarrow \infty$.
3. הוכיחו או הפריכו: נקבע פרמטר $0 < \lambda < 1$. תהי סדרה a_n המקיימת לכל n : $|a_{n+2} - a_{n+1}| < \lambda |a_{n+1} - a_n|$. אזי a_n מתכנסת.
4. הוכיחו או הפריכו: אם a_n סדרה כך שלכל $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ תת הסדרה $\{a_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, אז a_n מתכנסת.
5. תהי $M \subset \mathbb{R}$, $\emptyset \neq M$ קבוצה סופית. תנו דוגמא לסדרה כך ש- M היא קבוצת הגבולות החלקיים שלה.
6. תהי סדרה $\{a_n\}$ כך ש:
(א) $|a_{n+1} - a_n| < 2$.
(ב) $\liminf a_n \leq 1$.
(ג) $\limsup a_n \geq 4$.
הראו שיש לסדרה זו לכל הפחות שלושה גבולות חלקיים.
7. תהי a_n סדרה חיובית. הראו ש $\sum a_n$ מתכנס אם ורק אם $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס. בהצלחה ובהנאה!