113-88-תרגיל 9:

1.6) נניח בשלילה ש $u \neq \alpha v$ אזי הם בת"ל וניתן להרחיבם לבסיס ל V. כעת נגדיר פונקציונל באופן הבא:

לכל w וקטור בסיס שונה מ v $\varphi(w)=0$ ועבור v $\varphi(v)=1$

הפונקציונל הנ"ל לנארי וסותר את הנתון.

1.10) א) הרכבת העתקות לינאריות היא העתקה לינארית.

ב)

$$T^*(\alpha\phi_1+\phi_2)=\varphi(T(a\phi_1+\phi_2))=\varphi(aT(\phi_1)+T(\phi_2))=$$
$$a\varphi(T(\phi_1))+\varphi(T(\phi_2))=aT^*(\phi_1)+T^*(\phi_2)$$

2.1) $$[T_\alpha]^*=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}\overline{\alpha} & 0\\ 0 & \overline{\alpha}\end{pmatrix}=[T_{\alpha}]$$

2.4) א) נסמן $T=A+iB$ באשר B,A צל"ע. אזי

$T^*=(A+iB)^*=A^*+(iB)^*=A^*-iB^*=A-iB$. נחבר ונחסר את שני השויונות ונקבל

$$T+T^*=2A\to A=\frac{T+T^*}{2} \text{ ו- } T-T^*=2iB\to B=\frac{T-T^*}{2i}$$

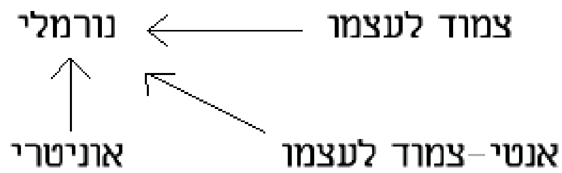
ב) נניח T נורמלי כלומר $TT^*=T^*T$. צ"ל כי $AB=BA$.

$$AB=\frac{T+T^*}{2}\frac{T-T^*}{2i}=\frac{(iT+iT^*)(T-T^*)}{2i}$$
$$=\frac{iT^2-iTT^*+iT^*T-i(T^*)^2}{2i}=\frac{iT^2-iT^*T+iTT^*-i(T^*)^2}{2i}$$
$$=\frac{(T-T^*)(iT+iT^*)}{2i}=BA$$

2.5) באופן דומה לתרגיל הקודם, נסמן $T=X+Y$ באשר X אופרטור צל"ע ו-Y אנטי-צל"ע. אזי:

$T^*=X^*+Y^*=X-Y$. נחבר ונחסר את שני השויונות ונקבל $X=\frac{T+T^*}{2}, Y=\frac{T-T^*}{2}$.

2.8) א+ב)



הגרירות ברורות, למשל אנטי-צל"ע לנורמלי: מתקיים $T^* = -T$ וצ"ל כי $TT^* = T^*T$. אכן, $TT^* = T(-T) = -TT = T^*T$ כדרוש. באופן דומה לצל"ע, אוניטרי.

נמצא למשל מטריצה נורמלית שאיננה אוניטרית, צל"ע או אנטי צל"ע. נבחר $M = \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$.

מטריצות אלכסוניות מתחלפות לכן M נורמלית. אך M לא שווה ל- M^* (לכן לא צל"ע), ולא ל- $-M^*$ (לכן לא אנטי צל"ע), וכמו כן M^* לא שווה ל- M^{-1} (לכן לא אוניטרית).

ג) לפי הגרירות שראינו בסעיף א', ברור כי צל"ע חיתוך נורמלי = צל"ע, אנטי-צל"ע חיתוך נורמלי = אנטי צל"ע, אוניטרי חיתוך נורמלי = אוניטרי.

צמוד לעצמו וגם אנטי-צמוד לעצמו: $T = T^*, -T = T^* \to T = -T \to 2T = 0$ לכן (מעל שדה שהמאפיין שלו לא 2) נקבל רק $T = 0$.

צל"ע וגם אוניטרי: $T^* = T, T^* = T^{-1} \to T = T^{-1} \to T^2 = I$

אנטי צל"ע וגם אוניטרי: $T^* = -T, T^* = T^{-1} \to T^{-1} = -T \to T^2 = -I$