תרגיל 2 ־ אנליזה פונקציונלית

6 בנובמבר 2018

הנחיות: יש לפתור 3 תרגילים מחלק א' ו3 תרגילים מחלק ב'. פתרון של השאלה הראשונה, משקלה כתרגיל שלם. מותר להשתמש בכל מה שאתם יודעים מקורסים הקודמים. כאשר ההוכחות בסעיפים שונים זהים או דומים ־ מותר לומר שזה דומה או זהה (בהנחה שזה נכון ושעשיתם את ההוכחה שאתם משתמשים בה נכון...).

1 קבוצות פתוחות וסגורות

1.1 רקע

נזכיר את המושגים המרכזיים.

הגדרה 1.1 יהי V מרחב נורמי, תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב V. יהי $a \in V$. נאמר ש $\{a_n\}$ מתכנסת ל a אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שאם $n > N$ אזי $\|a_n - a\| < \epsilon$ ונסמן

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

או

הגדרה 1.2 יהי V מרחב נורמי. $X \subseteq V$ נקראת קבוצה פתוחה ב V אם לכל $x \in X$ קיים r כך ש $B(x,r) \subseteq X$. אומרים ש $X \subseteq V$ קבוצה סגורה ב X, אם $V \setminus X$ היא קבוצה פתוחה ב V.

הגדרה 1.3 יהי V מרחב וקטורי, $X \subseteq V$. עבור $a \in V$ נאמר ש a היא נקודת גבול של X אם קיימת סדרה של איברי X, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש

$$.\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

משפט 1.4 קבוצה X סגורה אם ורק אם לכל נקודת גבול a של X, מתקיים $a \in X$.

הגדרה 1.5 יהי V מרחב נורמי, ו $X \subseteq V$. עבור $A \subseteq X$ נאמר ש A פתוחה ב X אם ורק אם לכל $a \in A$ קיים $0 < r$ כך ש $B(a,r) \cap X \subseteq A$. נאמר ש $A \subseteq X$ סגורה ב X אם $X \setminus A$ פתוחה ב X.
שימו לב ־ ההגדרה האחרונה חדשה ואותה לא הכרתם.

1.2 שאלות

1. יהי V מרחב וקטורי ו $X \subseteq V$. הראו שהתנאים הבאים שקולים.
   (א) X פתוחה ב V.
   (ב) קיים אוסף של כדורים פתוחים $\{B(a, r_a)\}_{a \in A}$ כך ש $X = \cup_{a \in A} B(a, r_a)$. (במילים אחרות X היא איחוד של כדורים פתוחים).
   (ג) קיים אוסף של קבוצות פתוחות $\{U_i\}_{i \in I}$ כך ש $X = \cup_{i \in I} U_i$. (במילים אחרות X היא איחוד של קבוצות פתוחות).
2. יהי V מרחב וקטורי, $X \subseteq V$. הראו שהתנאים הבאים שקולים.
   (א) X סגורה ב V.
   (ב) קיים אוסף של קבוצות סגורות $\{U_i\}_{i \in I}$ כך ש $X = \cap_{i \in I} U_i$.
3. עבור הקבוצות הבאות קבעו אם הן פתוחות או סגורות. (ייתכן קבוצה היא לא פתוחה ולא סגורה).
   (א)
   $$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$$
   (ב)
   $$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$$
   (ג)
   $$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1\right]$$
   (ד) קבוצה בעלת איבר בודד כלשהו במרחב נורמי.
4. הוכיחו או הרפיכו את הטענות הבאות. יהי V מרחב מטרי.
   (א) אם $\{A_k\}_{k=1}^{n}$ הוא אוסף של קבוצות פתוחות, אזי $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ הוא פתוחה.
   (ב) אם $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ הוא אוסף של קבוצות פתוחות, אזי $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ היא פתוחה.
   (ג) אם $\{A_k\}_{k=1}^{n}$ הוא אוסף של קבוצות סגורות, אזי $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ היא סגורה.
   (ד) אם $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ הוא אוסף של קבוצות סגורות, אזי $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ היא סגורה.

   (הדרכה: ניתן להשתמש בשאלה הקודמת ובעובדה ש $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$ כאשר A^c הוא המשלים של A.)
5. יהי V מרחב לינארי, $a \in V$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב V. הראו שהטענות הבאות שקולות:
   (א) $\lim_{n \to \infty} a_n = a$

(ב) לכל כדור פתוח $B\left(a,r\right)$ (כדור ברדיוס r עם מרכז a) קיים N כך שלכל $n<N$ מתקיים $a_n\in B(a,r)$.

(ג) לכל קבוצה פתוחה U שמכילה את a קיים N כך שלכל $N<n$ מתקיים $a_n\in U$.

6. יהי V מרחב נורמי ו $X\subseteq V$.

(א) הראו ש A פתוחה ב X אם ורק אם קיימת N פתוחה ב V כך ש $A=N\cap X$.

(ב) הראו ש A סגורה ב X אם ורק סא קיימת N סגורה ב V כך ש $A=N\cap X$.

(ג) הראו ש X תמיד פתוחה וסגורה ב X.

(ד) הראו ש $\emptyset$ (הקבוצה הריקה) תמיד פתוחה וסגורה ב X.

7. הוכיחו או הטענות הבאות:

(א) (a,b) הוא קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}$ אך לא ב $\mathbb{R}^2$, כאשר אנו מזהים את $\mathbb{R}$ עם ציר ה x.

(ב) יהי V מרחב נורמי, $X\subseteq V$. אזי $A\subseteq X$ פתוחה ב X אם ורק אם היא פתוחה ב V.

(ג) יהי V מרחב נורמי, $X\subseteq V$. איז $A\subseteq X$ סגורה ב X אם ורק אם היא פתוחה ב V.

(ד) יהי V מחרב נורמי, $X\subseteq V$ פתוחה ב V. אזי אם $A\subseteq X$ סגורה ב X היא סגורה ב V.

8. יהי $C\left[-\pi,\pi\right]$ רציפות (שמקבלות ערכים מרוכבים) על הקטע $\left[-\pi,\pi\right]$ ויהי T התת־מרחב הנפרש על ידי הקבוצה $\left\{e^{inx}\right\}_{-\infty<n<\infty}$. (שימו לב שהקבוצה כוללת גם את הפונקציה הקבועה 1 שכן, $e^{0x}=1$ באופן זהותי).

(א) הראו שהפונקציה $\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}\mathbf{d}x$ מהווה מכפלה פנימית על $C\left[-1,1\right]$.

(ב) הראו שהפונצקציה $\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle}$ מהווה נורמה (מותר לחפף ולהגיד שכל מכפלה פנימית משרה נורמה...)

(ג) הראו שהקוצה $\left\{e^{inx}\right\}_{-\infty<n<\infty}$ היא קבוצה אורתונורמלית ב $C\left[-\pi,\pi\right]$.

(ד) הראו שלכל $f\in\mathbf{span}\left\{e^{inx}|n\in\mathbb{Z}\right\}$ מתקיים

$$.f=\sum_{-\infty}^{\infty}\left\langle f,e^{inx}\right\rangle e^{inx}$$

(שימו לב שיש מספר סופי של גורמים בסכימה שלא מתאפסים (למה?). כמו כן ־ אפשר לנמק בקצרה בטיעונים על מערכות אורתונומרמליות).

(ה) חשבו את $\left\langle x^2,e^{inx}\right\rangle$ לכל n.

(ו) נסמן $a_n=\left\langle x^2,e^{inx}\right\rangle$. נסמן

$$.A_n=\sum_{m=-n}^{n}a_ne^{inx}$$

הראו ש $\lim_{n\to\infty}A_n=x^2$. (הערה ־ מותר להשתמש כאן בטענות על טורי פורייה מהקורסים הקדומים, אם אתם זוכרים אותם כמובן).

(ז) הראו ש x^2 הוא לא ב $f\in\mathbf{span}\left\{e^{inx}|n\in\mathbb{Z}\right\}$. (כלמר, שלא ניתן לבטא אותו כצירוף סופי של e^{inx}). (יש כמה דרכים ־ אבל אתם יכולים להשתמש במשפט ממרוכבות על פונקציות אנליטיות שמתלכדות על קבוצה קטע).

(ח) הסיקו ש $\mathbf{span}\left\{e^{inx}|n\in\mathbb{Z}\right\}$ אינה סגורה ב $C\left[-1,1\right]$.

2 קומפקטיות

2.1 רקע והגדרות

הגדרה 2.1 יהי V מרחב וקטורי. נאמר ש $X \subseteq V$ היא קבוצה קומפקטית אם ורק אם לכל סדרה של $\{a_n\}$ ב X, קיימת תת־סדרה מתכנסת ל $a \in X$.

הגדרה 2.2 יהי V מרחב וקטורי. יהי $X \subseteq V$. נאמר ש $\{U_i\}_{i\in I}$ הוא כיסוי פתוח של X אם

1. לכל $i \in I$, U_iפתוחה ב V.
2. $X \subseteq \cup_{i\in I} U_i$.

אם $J \subseteq I$ נאמר ש $\{U_j\}_J$ הוא תת־כיסוי פתוח של X.

משפט 2.3 חיתוך של קבוצה סגורה וקומקפטית הוא קומפקטי.

משפט 2.4 אם $f : X \to Y$ רציפה ו X קומפטקית, אזי $f(X)$ קומפקטית.

משפט 2.5 תהי $f : X \to \mathbb{R}$ ו X קומפקטית. אזי f מקבלת מינימום ומקסימום על X.
קבוצה $X \subseteq V$ היא קומפקטית אם ורק אם לכל תת־כיסוי פתוח של X קיים תת־כיסוי סופי של X.

1. בתרגיל הזה נוכיח את המפשט האחרון בצורה מודרכת.
   (א) נראה שאם לכל כיסוי פתוח של X קיים כיסוי סופי, אז לכל סדרה יש תת־סדרה מתכנת לאיבר ב X.
      i. הראו שאם ל $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ יש תת־סדרה שמתכנתס ל a, אזי לכל $r > 0$, קיימים אינסוף k כך ש $a_k \in B(a, r)$.
      ii. הסיקו שאם ל $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אין תת־סדרה מתכנסת לאיבר $a \in X$, אזי לכל $a \in X$ קיים r כך ש $B(a, r_a)$ מכיל לכל היותר מספר סופי של k כך ש $a_k \in B(a, r_a)$
      iii. הראו ש $B(a, r_a)$ הוא כיסוי פתוח של X.
      iv. השתמשו בקיום של תת־כיסוי סופי, והראו ש X יש לכל היותר מספר סופי של k כך ש $a_k \in X$ וקבלו סתירה.
   (ב) נראה שאם X קומפקטית, אזי לכל כיסוי קיים תת־כיסוי סופי.
      i. יהי $x_1 \in X$ ו $r > 0$. נניח שבחרנו $x_1, \ldots, x_n$ נבחר x_{n+1} כך ש $\|x_{n+1} - x_i\| > r$ לכל $1 \le i \le n$.
      הראו שהתהליך חייל לעצור לאחר מספר סופי של צעדים.
      הדרכה: הראו שאם התהליך לא עוצר אזי קיימת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש $\|x_i - x_j\| > r$ לכל $i \ne j$. הראו שלסדרה הזאת אין תת־סדרה מתכנסת וקבלו סתירה להנחה.
      ii. הסיקו שלכל $r > 0$ קימת קבוצה סופית $X \supseteq \{a_1, \ldots, a_n\}$ כך ש
$$.X = \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, r)$$
      iii. הסיקו שלכל n קיימת קבוצה סופית $A_n = \{a_{n1}, \ldots a_{ni_n}\}$ כך ש
$$.X = \bigcup_{j=1}^{i_n} B\left(a_{nj}, \frac{1}{n}\right)$$

iv. הראו ש $A=\cup_{n=1}^{\infty}A_n$ הוא בן מניה.

v. נסמן $\mathcal{B}=\left\{B\left(a,\frac{1}{n}\right)|\exists m>0: m=n\wedge a\in A_n\right\}$. הראו ש $\mathcal{B}$ אף היא בת מניה.

vi. תהי U קבוצה פתוחה. הראו שלכל $x\in U$ קיים n ו $a\in A_n$ כך ש $B\left(a,\frac{1}{n}\right)\subseteq U$ ו $x\in B\left(a,\frac{1}{n}\right)$.
הדרכה: מכיוון ש U פתוחה ו $x\in U$, קיים $r>0$ כך ש $B\left(x,r\right)\subseteq U$. הראו שאם $\|y-x\|<\frac{r}{2}$ אזי $B\left(y,s\right)\subseteq B\left(x,r\right)$ לכל $s<\frac{r}{2}$. קחו n כך ש $\frac{1}{n}<\frac{r}{2}$ והראו שקיים $a\in A_n$ כך $x\in B\left(a,\frac{1}{n}\right)$.

vii. הסיקו שכל קבוצה פתוחה ב $U\subseteq X$ ניתן להציג כאיחוד של קבוצות בנות מניה, או במילים אחרות שכל קבוצה פתוחה ב U היא איחוד של איברי $\mathcal{B}$.
הדרכה: בעזרת הסעיף הקודם, לכל $x\in A$ קיימים $a\left(x\right)$, $n\left(x\right)$ כך ש $a\in A_n$ ו $x\in B\left(a\left(x\right),\frac{1}{n(x)}\right)\subseteq X$. הראו הכלה דו־כיוונית והשתמשו בעובדה שיש לכל היותר מספר בן־מניה של כדורים כאלה (מסעיפים הקודמים).

viii. יהי $\left\{U_i\right\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של X. נגדיר פונקציה

$$\phi:\mathcal{B}\rightarrow\left\{U_i|i\in I\right\}\cup\left\{\emptyset\right\}$$

באופן הבא. אם קיים $i\in I$ כך ש $B\subseteq U_i$, נבחר אחד כזה ו $\phi\left(B\right)=U_i$. הראו שהתמונה של ϕ היא בת מניה.
הדרכה: תמונה של קבוצה בת־מניה היא בת־מניה. כמו כן, הזכרו שכל $B\in\mathcal{B}$ הוא כדור פתוח וכל קבוצה פתוחה ב X היא איחוד של איברי $\mathcal{B}$ (שמן הסתם מוכלים בה).

ix. הראו

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}}\phi\left(B\right)=X.$$

הדרכה: מראים הכלה דו־כיוונית. כיוון אחד של הכלה ברור ברור, שכן כל איבר B הוא איבר X. מצד שני לכל $x\in X$ קיים $i\in I$ כך ש $x\in U_i$ (לפי הגדרה של כיסוי פתוח). לפי הסעיפים הקודמים קיים $B\in\mathcal{B}$ כך ש $x\in B\subseteq\mathcal{B}$. אבל $B\subseteq\phi\left(B\right)$ ולכן $x\in\phi\left(B\right)$.

x. עכשו הניחו שיש כיסוי פתוח $\left\{U_i\right\}_{i\in I}$ של X שאין לו תת־כיסוי פתוח סופי. בעזרת הסעיפים הקודם הראו שיש לו תת־כיסוי ב"מ $\left\{U_{i_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. הראו שלכל n מתקיים

$$X\not\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}U_{i_n}$$

וקיים a_{n+1} כך ש

$$a_{n+1}\notin\bigcup_{k=1}^{n}U_{i_k}.$$

במילים אחרות הראו שקיימת סדרה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל $k<n$ מתקיים $a_n\notin U_k$.

xi. הראו שלתת סדרה שבניתם בסעיף הקודם קיימת תת־סדרה מתכנסת. $\left\{a_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ ל $a\in X$.

xii. הראו שקיים m כך $a\in U_m$ ו N כך שלכל $k>N$, $a_{n_k}\in U_m$. (השתמשו באחד מהתנאים השקולים להתכנסות).

xiii. הראו שיש סתירה בן איך שבנינו את הסדרה.

2. תהי X קבוצה קומפקטית. תהי $V\subseteq X$ קבוצה סגורה ב X. הראו ש Vקומפקטית. (רמז: השתמשו בטענה שהוכחנו בתרגול על חיתוך של קומקפטית וסגורה).

3. יהי V מרחב נורמי, $X \subseteq V$ סגורה, $v \in V$. נגדיר מרחק בין v ל X

$$\texttt{dist}\left(v,X\right)=\min_{x\in X}\left\Vert x-v\right\Vert .$$

(א) הראו שהמרחק מוגדר היטב. (כלמר שהמינימום מתקבל)
(ב) הראו שהפונקציה $d\left(v\right)=\texttt{dist}\left(v,X\right)$ רציפה.
(ג) תהי Y קומפקטית. נגדיר $\texttt{dist}\left(Y,X\right)=\min_{y\in X}\texttt{dist}\left(y,X\right)$. הראו שהרחק מוגדר היטב.

4. יהי V מרחב נורמי, ויהי $\{U_i\}_{i\in I}$ אוסף של קבוצות קומקטיות שאינו ריק. נניח שלכל $i_1,\ldots,i_n$ מתקיים

$$\bigcap_{k=1}^{n}U_{i_k}\neq\emptyset .$$

הראו ש

$$\bigcap_{i\in I}U_i\neq\emptyset .$$

הדרכה: נבחר U_t באופן אקראי.

(א) הראו שכלכל $i\in I$, $U_i\cap U_t$ קומפקטית וסגורה ב U_t.
(ב) הראו ש

$$U_t\cap\left(\bigcap_{t\neq i\in I}U_i\right)=(\bigcap_{t\neq i\in I}U_t\cap U_i)=\bigcap_{i\in I}U_i .$$

(ג) הסיקו שאם החיתוך ריק, אזי

$$U_t=U_t\cap\left(\bigcap_{t\neq i\in I}U_i\right)^c=U_t\bigcap\left(\bigcup_{t\neq i\in I}U_i^c\right)=\bigcup_{t\neq i\in I}U_t\cap U_i^c$$

ושהקבוצה $\{U_i^c\cap U_t\}_{t\neq i\in I}$ היא כיסוי פתוח של U_t.
(ד) הראו שקיימים $i_1,\ldots,i_n$ כך ש

$$U_t=\bigcap_{k=1}^{n}U_t\cap U_{i_k}^c .$$

(ה) הראו ש

$$U_t\cap\bigcap_{k=1}^{n}U_{i_k}=\emptyset$$

והראו שיש סתירה להנחה.

5. יהיו $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ קבוצות כך שכל n, מתקיים $V_{n+1}\subseteq V_n$ ושלכל n, V_n הוא איחוד סופי של קטעים סגורים. הראו ש

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n\neq\emptyset .$$