

## מבחן בפונקציות מרוכבות

### מועד ב

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 18 נקודות.  
כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט.  
משך הבחינה שלוש שעות. בהצלחה!

1. נניח ש- $z$  ו- $w$  הם שני מספרים מרוכבים כך ש- $\operatorname{Im}(z+w) = \operatorname{Im}(zw) = 0$  אז  
בהכרח  $z = \bar{w}$  או  $z = -\bar{w}$  שניהם ממשים.

2. נניח ש- $f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  היא פונקציה אנליטית בתחום  
 $D \subset \mathbb{C}$ . נגדיר  $g(x, y) = e^{u(x, y)} \cos[v(x, y)]$ . הוכיחו ש- $g$  פונקציה הרמונית ב- $D$ .

3. חשבו:  $\int_{\gamma} \bar{z} \sin z \, dz$  כאשר  $\gamma$  הוא המעגל  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$   
מתואר נגד כיוון השעון.

4. חשבו את האינטגרל  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 3x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$  והצדיקו את תשובתכם.

5. הוכיחו שכל האפסים של הפונקציה  $f(z) = \frac{z^5 - 3z^3 + 2z - 2}{z^4 + z + 5}$  הם בעיגול  
 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$

6. קבעו את סדר הקוטב של הפונקציה  $f(z) = \frac{(z - \pi)^2}{(\sin z)^5} - \frac{1}{(1 + \cos z)^2}$  בנקודה  $z = \pi$ .  
הצדיקו את תשובתכם.

בהצלחה!