

## שיעורי בית 6

15 בדצמבר 2015

1. תהא  $G$  חבורה סופית. נסמן ב  $\sim$  את יחס הצמידות.

(א) יהא  $x \in G$ , ונסמן  $H = C(x) = \{g \in G : gx = xg\}$  המרכז של  $x$ . נגדיר יחס שקילות נוסף על  $G$ :

$$g_1 \equiv g_2 \iff g_1^{-1}g_2 \in H$$

הוכח כי גודל קבוצת המנה שווה לגודל מחלקת הצמידות של  $x$ . כלומר

$$|G/\equiv| = |[x]_{\sim}|$$

הדרכה: הראו שניתן להגדיר פונקציה

$$f : G/\equiv \rightarrow [x]_{\sim}$$

ע"י

$$\forall [g]_{\equiv} \in G/\equiv : f([g]_{\equiv}) = gxg^{-1}$$

ושפונקציה זאת חח"ע ועל.

(ב) השתמשו בסעיף הקודם להסיק כי גודל מחלקת צמידות מחלק את גודל החבורה. כלומר לכל  $x \in G$  מתקיים

$$|G| = k |[x]_{\sim}|$$

עבור  $k$  שלם כלשהוא.

2. תהא  $G$  חבורה עם  $p^n$  איברים ( $p$  מספר ראשוני,  $n$  מספר טבעי) הוכיחו כי במרכז של  $G$  קיים יותר מאיבר אחד (כמובן שהאיבר הנטרלי תמיד שייך למרכז..). כלומר

$$|Z(G)| > 1$$

הדרכה: השתמשו בכך ש

(א)  $G$  היא איחוד זר של מחלקות צמידות. (ומה גודל מחלקת שקילות של איבר במרכז?)

(ב) בשאלה הקודמת

(ג) בחבורה  $\mathbb{Z}_p$  (שקילות מספרים שלמים מודולו  $p$ )

3. תהא  $G$  חבורה סופית.  $H$  תת חבורה של  $G$  ו  $K$  תת חבורה של  $H$ . הוכח כי

$$|G/K| = |G/H| \cdot |H/K|$$

4.

(א) תהא  $G$  חבורה. יהא  $g \in G$  מסדר  $n$  ( $n$  טבעי). יהא  $n = ab$  פירוק של המספר  $n$ . הוכח כי הסדר של  $g^a$  הוא  $b$

(ב) טענה: תהא  $G$  חבורה בת  $p^n$  איברים (כאשר  $p$  מספר ראשוני ו  $n$  מספר טבעי). הוכח כי קיים  $g \in G$  מסדר  $p$ . (רמז: ניתן להוכיח טענה זאת באינדוקציה).

5.

(א) תהא  $G$  חבורה.  $H$  תת חבורה. הוכח כי מספר הקוסטים השמאליים שווה למספר הקוסטים הימניים.

כלומר הקבוצות  $K_1 = \{gH \mid g \in G\}$  ו  $K_2 = \{Hg \mid g \in G\}$  בעלות עוצמה שווה. (הדרכה: הגדר  $\phi : K_1 \rightarrow K_2$  ע"י  $\phi(gH) = Hg^{-1}$ . הוכח כי  $\phi$  מוגדרת היטב, חח"ע ועל)

(ב) תהא  $G$  חבורה.  $H$  ת"ח. הוכח כי אם הסדר של  $G/H$  הוא 2 אז מתקיים כי

$$\forall g \in G : gH = Hg$$