תרגול 10-המשך

1. נגדיר $T:C\left(\left[0,1\right]\right)\to\mathbb{R}$ ע"י $T\left[f\right]=f\left(0\right)$. הוכיחו שאם נגדיר על $C\left(\left[0,1\right]\right)$ את הנורמה הרגילה, אז T רציף, אבל אם נגדיר על $C\left(\left[0,1\right]\right)$ את נורמת L^2 ביחס למידת לבג, אז T לא רציף.

פתרון: נתחיל מהמקרה שעל $C\left(\left[0,1\right]\right)$ מוגדרת הנורמה הרגילה ($\|f\|=\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|$). כדי להוכיח רציפות נסתמך על המשפט הקודם, ונוכיח כי $\|T\|<\infty$ (כלומר T חסומה). ובכן, לכל f המקיימת $\|f\|=1$ מתקיים $\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|=1$ ולכן $|f(0)|\le 1$ או $\left|T\left[f\right]\right|\le 1$. מכאן שכל איברי הקבוצה $\left\{\|T[f]\|_{\mathbb{R}}:\|f\|=1\right\}$ חסומים מלעיל ע"י אחד, ולכן $\|T\|=\sup\left\{\|T[f]\|_{\mathbb{R}}:\|f\|=1\right\}\le 1<\infty$ כנדרש.

נניח כעת כי על $C\left(\left[0,1\right]\right)$ מוגדרת נורמת L^2 ביחס למידת לבג ($\|f\|=\left(\int_0^1|f|^2\,dm\right)^{1/2}$) ויש להפריך את הרציפות. נמצא סדרת פונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ שמתכנסת לפונקציית האפס בנורמת L^2, אבל $T\left[f_n\right]\not\to T\left[0\right]=0$ ב- $\mathbb{R}$. ניקח סדרה כדלהלן $f_n(x):=\begin{cases}1-nx & 0\le x\le \frac{1}{n}\\ 0 & \frac{1}{n}\le x\le 1\end{cases}$. נחשב

$$\|f_n-0\|=\left(\int_0^1|f_n-0|^2\,dm\right)^{1/2}=\left(\int_0^1|f_n|^2\,dm\right)^{1/2}=\left(\int_0^{1/n}|1-nx|^2\,dm(x)\right)^{1/2}$$

$$=\left(\int_0^{1/n}\left(1-2nx+n^2x^2\right)dm(x)\right)^{1/2}=\left(x-nx^2+n^2\frac{x^3}{3}\bigg|_{x=0}^{x=1/n}\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{3n}}\to 0$$

לכל n $T\left[f_n\right]=f_n\left(0\right)=1$ ולכן $T\left[f_n\right]\to 1\ne 0$.

תזכורת (משפט ההצגה של ריס): אם L הינו פונקציונאל רציף על מרחב הילברט H אזי $Lx=\langle v,x\rangle$ עבור איזשהו $v\in H$.

2. נגדיר $M \subset l^2$ להיות תת המרחב שמכיל בדיוק את כל הסדרות $\{a_n\} \in l^2$ כך ש $a_n = 0$ פרט למספר סופי של אינדקסים. אז M הוא מרחב מכפלה פנימית לא שלם (אין צורך להוכיח). הראו ע"י דוגמה כי משפט ההצגה של ריס נסתר ב M .

פתרון: נגדיר את הפונקציונאל $L\{y_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{n}$, קל לראות כי L לינארי וכן הינו רציף שכן הוא חסום. כעת נניח כי $Ly = \langle v, y \rangle$ עבור $v \in M$ כלשהו. מכיוון ש $v \in M$ נובע כי קיים $N > 0$ כך ש $v(k) = 0$ עבור $k > N$. ניקח את הסדרה $\{y_n\} = \delta_{N+1}$, אזי ברור כי $L\{y_n\} = \frac{1}{N+1}$ אבל $\langle v, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} v(i)\, y(i) = 0$ ומכאן סתירה.