

תרגיל 10

להגשה עד 1.2.17

יהי (X, \mathbb{A}, μ) ממו"ח.
נסמן: $L^p(\mu) = L^p(X, \mathbb{A}, \mu)$ ו: $L^p(\mathbb{N}) = l^p$.

שאלה 1

תהי $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ מדידה- \mathbb{A} , $E_f := \{p \in (0, \infty) \mid \|f\|_p < \infty\}$.

1. אם $r < s$ שניהם ב- E_f אז הקטע (r, s) מוכל ב- E_f (ז"א E_f קמורה ב- \mathbb{R}).

2. אם $0 < r < p < s < \infty$ אז קיים $t \in (0, 1)$ יחיד כך ש- $p = tr + (1-t)s$. עבור t זה:

$$\|f\|_p \leq \|f\|_r^{t(\frac{p}{r})} \cdot \|f\|_s^{(1-t)(\frac{p}{s})} \leq \max\{\|f\|_r, \|f\|_s\}$$

בפרט: $L^r(\mu) \cap L^s(\mu) \subseteq L^p(\mu)$.

שאלה 2

תהי $K: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ מדידה ביחס למרחב מידת המכפלה. נניח כי קיים $M < \infty$ כך ש:

$$\forall x: \int |K(x, y)| d\mu(y) < M \quad ; \quad \forall y: \int |K(x, y)| d\mu(x) < M$$

עבור f מדידה, נגדיר: $T(f(x)) := \int K(x, y)f(y)d\mu(y)$. הוכיחו כי:

$$1. \|T(f)\|_{L^1} \leq M\|f\|_{L^1}$$

$$2. \text{עבור } p \in (1, \infty) \text{ מתקיים: } \|T(f)\|_{L^p} \leq M\|f\|_{L^p}$$

שאלה 3

יהי $p \in [1, \infty)$, ותהי $f \in L^p(\mu)$. הוכיחו כי המידה של הקבוצה: $[f \neq 0] = \{x \mid f(x) \neq 0\}$ הינה σ -סופית (כלומר, ניתן להציג את הקבוצה כאיחוד של קבוצות מדידות ובעלות מידה סופית).

שאלה 4

$$1. \text{יהי } 1 \leq p \leq \infty. \text{ הוכיחו כי } l^p \subseteq l^\infty.$$

$$2. \text{הראו כי המרחב } (l^1, \|\cdot\|_\infty) \text{ אינו שלם.}$$

שאלה 5

נתבונן במרחב הילברט $L^2([-1, 1])$.

1. תארו את המרחב האורתוגונלי לוקטור $f(x) = c$ (פונקציה קבועה על $[-1, 1]$).

2. מצאו בסיס אורתונורמלי לתת המרחב הנפרש ע"י הוקטורים $\{1, x, x^2\}$.

שאלה 6

נגדיר: $F := \{(a_n)_n \subset \mathbb{R} \mid \sup_n n|a_n| < \infty\}$. הוכיחו או הפריכו:

1. F תת מרחב לינארי של l^2 .

2. הקבוצה $F \cap l^2$ סגורה ב- l^2 .

בהנאה (: